ESTIMACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE EN UNA MEDICIÓN

Sebastian Fortin

Abril 2008

ESTIMACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE EN UNA MEDICIÓN

Sebastian Fortin

IAFE-CONICET-UBA

Resumen: El de la medición es un concepto fundamental en la física. Sin la medición toda la actividad científica se vería reducida a especulaciones filosóficas incontrastables. Es por eso que cualquiera que desee incursionar en el mundo físico debe estar al tanto de lo que la medición y la estimación de los errores son. En este breve trabajo intentamos introducir brevemente estos puntos de forma teórica y se comenta un experimento simple que no necesita instrumentos complejos que permite llevar a la práctica lo aprendido.

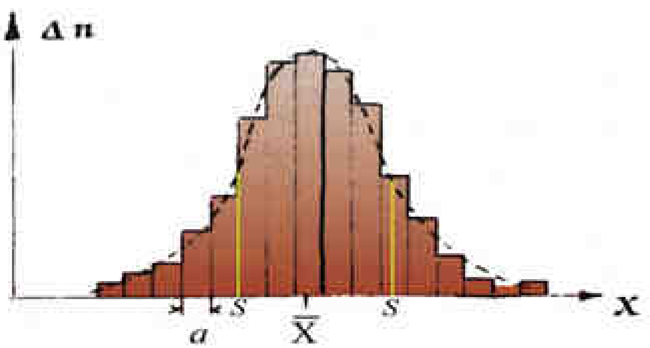
INTRODUCCIÓN

La medición y su precisión es algo fundamental antes de hacer cualquier experiencia. Y esto nos interesa pues es en el campo experimental que se corrobora el comportamiento de los fenómenos físicos. De dicha precisión y su incertidumbre es de lo que nos ocuparemos a lo largo de este informe.

El proceso de medición se basa en comparaciones. Lo único que se hace es comparar sistemas regidos por magnitudes distintas. Primero tenemos al objeto a estudiar y luego el instrumento de medición que se basa en una unidad definida arbitrariamente por convención. La magnitud que se obtiene de este proceso es sólo un número que compara cuantas veces entra este en el patrón convenido anteriormente (el metro patrón es un ejemplo del mismo). Pero experimentalmente se verifica que las mediciones hechas a un mismo objeto, con el mismo proceso de medición, varia en el resultado. Y nos vemos en el dilema de decidir cual será la medición correcta, pues es claro que alguna estará mal tomada (lo más probable que todas lo estén). Esta dispersión en las medidas obtenidas son productos de errores de medición. La incertidumbre en las mediciones pueden provenir del instrumento, una por la calibración del mismo o del cero corrido, esta tienen un error fijo, o también esta la dispersión por apreciación que es el límite de hasta cuantos guarismos llega el instrumento (por ejemplo si un cronometro nos da que ΔT = 0,50 seg. y su apreciación es de 0,01 seg. Entonces sólo podemos asegurar que el valor estará entre 0,49 y 0,51). Pero nosotros lo que vamos a estudiar es el comportamiento de las mediciones sucesivas hechas a un mismo objeto.

Primero supongamos que tenemos hecha n mediciones a un mismo objeto. Esto nos da una tira de número que en principio no dice nada. De las n mediciones sacamos un valor promedio que lo simbolizamos así: X y que se obtiene de esta forma: $(\sum Xi)/n=X$, y este es un valor que se aproxima bastante al real. Es fácil acotar la incertidumbre entre X-Xi(min) y X+Xi(max), pero esta cota es muy grande para que tenga utilidad y como luego veremos se puede extender a $(-\infty,+\infty)$. Para evitar este inconveniente esta lo que se llama desviación estándar *. Tememos que $X-Xi=\varepsilon$ y ε es la suma de las desviaciones con respecto a X. Como ε va a ir dando valores positivos o negativos, según la posición de Xi con respecto de X, hacemos $\varepsilon^2 =\sum(X-Xi)^2$ quedando un valor más representativo. Luego decimos que $v=\underline{\sum}(X-Xi)^2 \div n$ y esto será el promedio de los cuadrados de las desviaciones. Por último como este valor es una relación de cuadrados le ponemos la raíz y obtenemos la desviación estándar, simbolizada por *S*, que se expresa como: $S = \underline{\sum(X-Xi)^2}$. Con este valor podemos aproximar la medición en el intervalo (X- *S*, X+ *S*) con un porcentaje del 68% aproximadamente de posibilidades que en posteriores mediciones el valor caiga en ese intervalo. Ahora imaginemos que hacemos N veces las n mediciones y que a cada una le calculamos los promedios y las desviaciones; tendremos N X a los cual le calculamos el promedio (o sea es el promedio de los promedios, simbolizado con X. Y a su veces a esta nueva serie de números se le puede calcular el desvió estándar, que sería el desvió de los promedios que se obtiene de forma análoga a la otra desviación (ξ== $\underline{\sum(X-Xi)^2}$). Y se comprueba experimentalmente que $\xi\approx S/\sqrt{n}$. Esta relación es aproximada, pero se comprueba que al aumentar el N la aproximación se transforma en igualdad. Con esto podemos con sólo n mediciones predecir cuantas (N) veces tengo que repetir esa serie para que ξ<"al error de apreciación". Pues si despejo de la última formula queda $N\approx (S/\xi)^2$ y si en lugar de ξ ponemos el error de apreciación instrumental, habremos aproximado la cantidad de N que necesitamos para esto. Vale la aclaración que una vez obtenido que el desviación estándar de los promedios es menor al error apreciación del instrumento no tiene sentido seguir aumentando los N pues a partir de ese momento los más probables valores de la medición estarán siempre dentro del error de apreciación. De hacer ξ/X de obtiene la cantidad que se llama error relativo del promedio, y $100\xi/X$ se lo conoce como error porcentual del promedio (que los simbolizaremos con E_r, $E_{r\%}$).

De cada una de las series se puede hacer un gráfico que represente lo que esta pasando con las mediciones. El gráfico se fabrica de la siguiente forma: se tienen hechas n mediciones, cada una será simbolizada por Xn, de las cuales se sustrae el máximo y mínimo de las Xn y luego se toma como dominio en donde se desarrollara el gráfico a Xmin, Xmax. Esta distancia se la divide por un número elegido arbitrariamente, que lo llamaremos d, y obtenemos α. Quedando d "intervalitos" desde Xmin hasta Xmax de longitud igual a $(Xmax-Xmin)\div d=\alpha$. Luego se hace un histograma con las n mediciones, quedando cada intervalo acompañado del número de veces que caen las mediciones en el. Y por último se hace un gráfico de barras con el histograma. Cuya gráfica es de esperar de la siguiente forma:



Como se ve en el gráfico hay una curva que se ajusta a la forma del histograma. Esta se llama curva de Gauss. A mayor número de mediciones la gráfica se va pareciendo a la ideal (tomando, claro esta, a la de Gauss como tal), cuya formula es: $\Delta n(x)/\Delta x=C\exp(-h(x-m)^2)$, de las integrales se deduce que $C=N/\sqrt{(2\Pi)}S$; $X=m$ y $h=(S\sqrt{2})^{-1}$.

Del estudio de la curva de Gauss se ve que en $X-S$ y $X+S$ la función tiene un punto de inflexión, o sea que su derivada segunda es cero, por lo que es en esos puntos donde cambia su concavidad.

A medida que aumentamos el número de mediciones se incrementa la probabilidad de que haya datos cada vez más alejados de promedio. Pero también se pueden dar casos aislados en los que se cometa un error no casual (con un comportamiento no Gaussiano) originados por factores extraños (distracciones, mal funcionamiento del instrumento, perturbaciones físicas, etc.). Estos casos se los considera aislados debido a que en un número de mediciones relativamente baja aparecen más cantidad de valores alejados de lo que se esperaría, y por lo tanto es recomendable descartar dichos datos.

En línea general lo que haremos a continuación es mostrar como nosotros usamos esta teoría a mediciones hechas por nosotros. Y que una vez que analicemos y saquemos conclusiones, podremos predecir con que número de mediciones tendremos una incertidumbre dentro de los rangos aceptables.

PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL

Ante todo tomamos al péndulo y aproximamos el período a 2seg.variando el largo del hilo (figura 1).

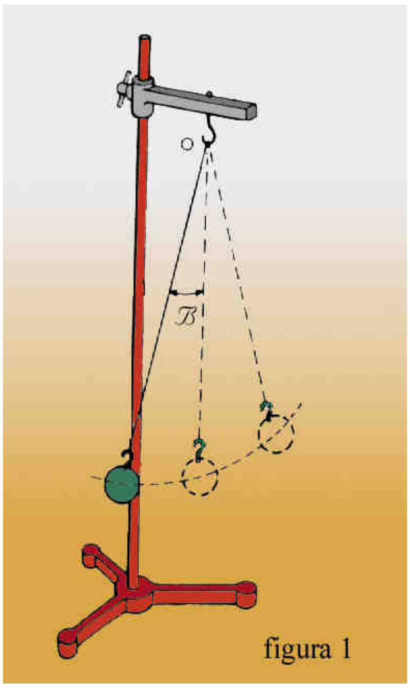


figura 1

Una vez fijado el hilo tomamos como punto de referencia la altura máxima (*h* en figura 2)de la oscilación para la puesta de cero del cronómetro, cuya apreciación es del orden de la centésima de segundo. Nos aseguramos que las mediciones las haga siempre la misma persona y que la puesta a cero del aparato de medición sea correcta. Tomamos un ángulo (β en las figuras) no muy grande como punto de partida de la oscilación, porque después de cierto valor ya no se puede predecir con exactitud su movimiento. Lo soltamos y dejamos oscilar una vez (de A a C en la figura 2) para disminuir la incertidumbre de la medición y aseguramos que el péndulo realice su movimiento en un solo plano.

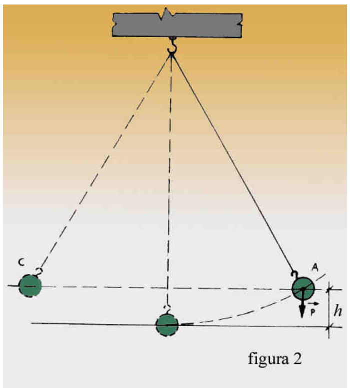


figura 2

Empezamos con una serie de diez mediciones deteniendo el péndulo y reanudando el procedimiento entre medición y medición para no tener inconveniente con la variación en el período y después trasladamos los datos a la computadora. Repetimos para una serie de veinte, luego una de treinta y por último una de cincuenta para totalizar una serie de 100 mediciones. Trasladados todos los datos en la tabla se procedió a la resolución en función del período denominado histograma. Con los datos ingresados podemos obtener un desvío estándar y el promedio de las mediciones. Luego reanudamos el procedimiento haciendo diez series de diez mediciones cada una y calculando el promedio de ellas para luego ingresar estos cien datos a un nuevo histograma y hacer comparaciones.

RESULTADOS

- <u>Valores medidos</u>:

De la primera medición de 20 valores, con estos datos se puede calcular el periodo promedio X=2,1435s, y se calcula S=0,03048s. Y para el gráfico se obtuvieron el valor máximo de T_{max}= 2.21s y el valor mínimo de T_{min}= 2.08s, por lo que se calculamos con un d=6 y un α=0.02s (tamaño de los intervalos) los con lo que se construye la siguiente gráfica :

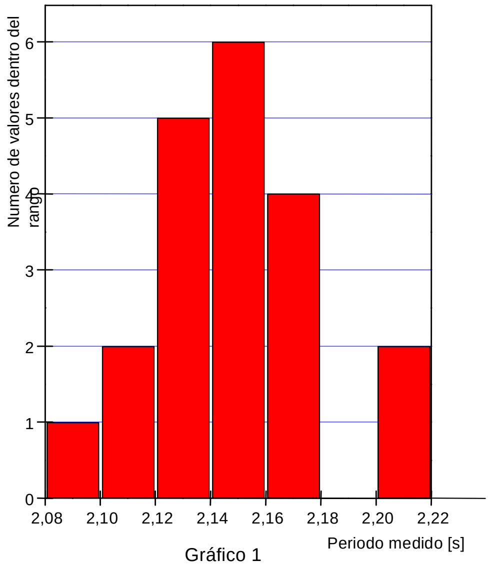


Gráfico 1

Luego a estos datos se le sumaron otras treinta mediciones, con lo que uno obtiene un X= 2,1424s y *S*=0,04094s resultando el gráfico 2:

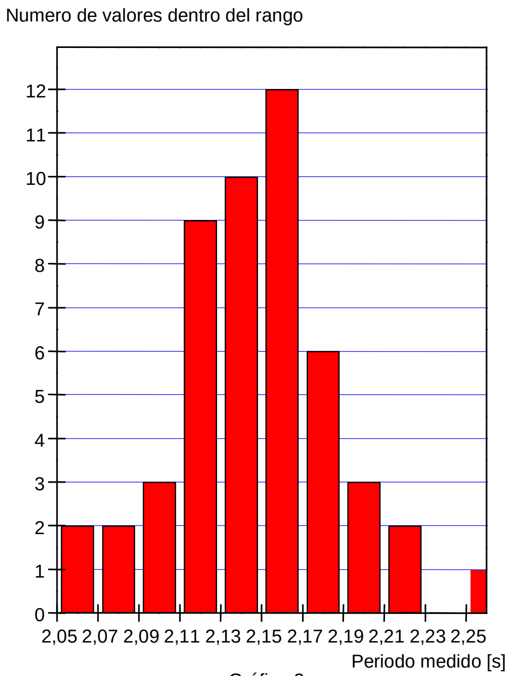


Gráfico 2

Y finalmente el gráfico tres nos muestra la serie completa (de cien mediciones) y los cálculos pertinentes arrojan los siguientes resultados X= 2,1388s y δ S=0,04174s.

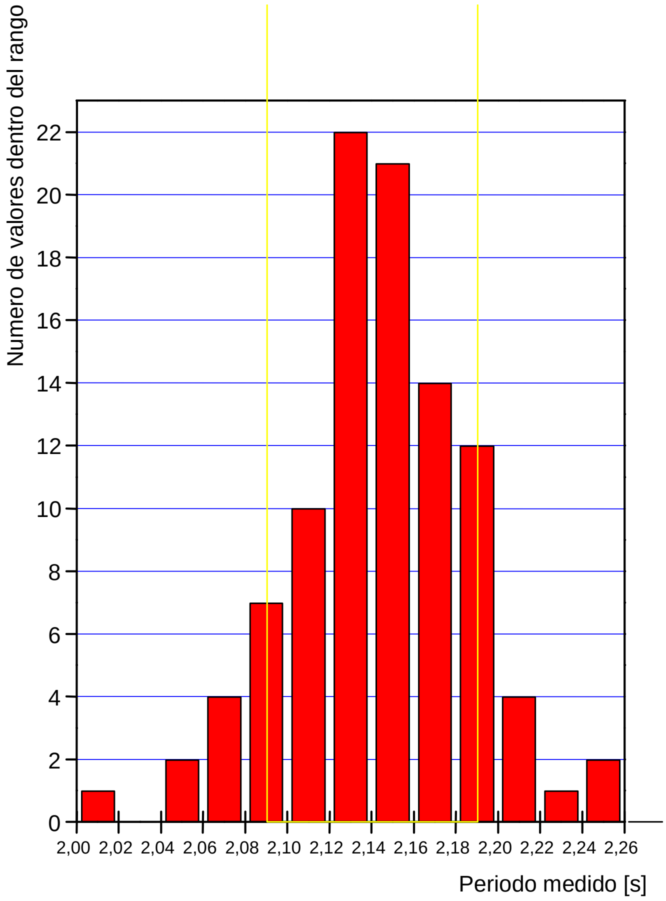


Grafico 3

Con estos últimos valores podemos marcar un intervalo dentro del cual es más probable que se obtenga un valor al medir el periodo de este péndulo, para calcular la cota superior hacemos X+ *S*=2.09706s y la cota inferior X-*S*=2.09706s.

Ahora podemos calcular cuantos valores entran en este intervalo, con ayuda del siguiente gráfico en el que se señala con un cuadro amarillo el mencionado intervalo. Es obvio que de los de la primera columna no entra ninguno de los valores, al igual que de los de la segunda, tercera y cuarta. En la sexta, séptima, octava y novena la totalidad de las muestras se encuentra dentro del intervalo, y suman un número de 67.

Tanto en la quinta columna como en la décima no todos los valores entran en el cuadro, por lo que podemos aproximar él número. Quedando un total de 68, mediciones, que representa el 68% ya que el número de muestras es cien. De esto se puede concluir que el valor medido del periodo del péndulo es de 2.14s□0.05s. Puede observarse que se recorto la cantidad de decimales que se usan, ya no tiene sentido usar mas de dos porque la resolución del cronometro con que medimos los tiempos es de 0.01s.

Como dato adicional cabe señalar que el error relativo es E r=0.019, que es equivalente el error porcentual es del 1,9%.

Luego realizamos otras cien mediciones con el propósito de estudiar como varía la desviación estándar a medida que aumenta el número de mediciones; para lo cual medimos diez series de diez, y en cada una calculamos el promedio y la desviación estándar, los resultados a continuación:

	Promedio	D.S.
Primera serie	1,998s	0,04686s
Segunda serie	1,998s	0,05224s
Tercera serie	2,001s	0,04999s
Cuarta serie	2,02s	0,05033s
Quinta serie	2,005s	0,019s
Sexta serie	2,001s	0,05087s
Séptima serie	2s	0,05518s
Octava serie	2,001s	0,0428s
Novena serie	2,016s	0,04402s
Décima serie	1,998s	0,03259s
Promedio	2,0038s	0,04439s

De esta manera puedo calcular el promedio de los promedios y el desvío estándar de los promedios, cuyos valores son X=2,0038s y ξ=0,00783s. Si hacemos un tratamiento con todos los datos juntos, obtenemos: X=2,0038s, S=0,0441s. Cabría esperar que 0.04435/√1 =0.01403s sea igual al desvío estándar de los promedios, pero difiere en un factor de dos. Al estudiar el histograma de los diez promedios uno descubre una irregularidad.

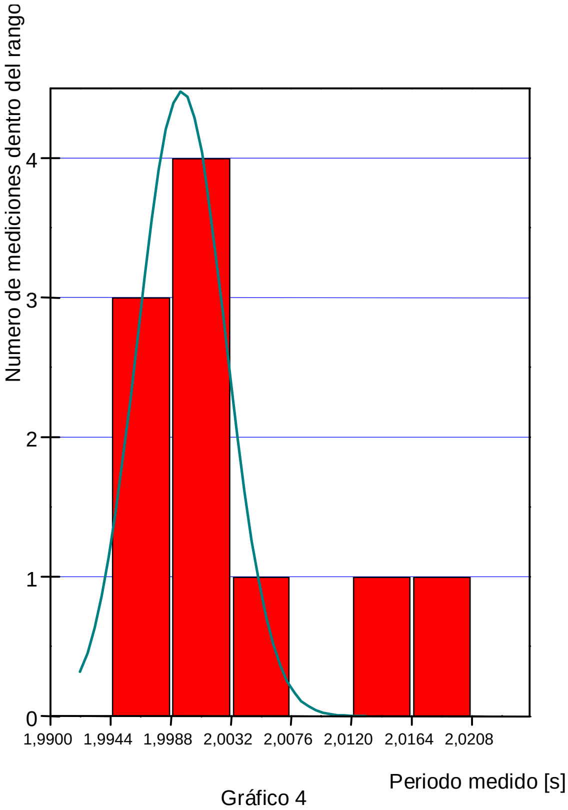


Gráfico 4

Es el gráfico 4 y puede verse claramente que los dos valores de la derecha son bastante irregulares si se los compara con el resto de las mediciones. Como dijimos anteriormente estos valores conviene descartarlos. Haciendo esto y re-calculando la desviación estándar de los promedios da como resultado =0,00238 mucho más pequeño, y ahora si 0.04369/√8=0.015447, que es mayor 0.00783s. Una explicación de la divergencia podría ser que el error nato de la persona que midió era de aproximadamente 0.05s por lo que por mas que aumente la cantidad de muestras no mejorara el rango de error. También seria interesante observar la forma en que varia la desviación estándar con el numero de mediciones. Para ello nos será útil la siguiente tabla:

# de mediciones	Desviación estándar
10	0,04686s
20	0,0483s
30	0,04802s
40	0,04883s
50	0,04432s
60	0,04503s
70	0,04618s
80	0,04552s
90	0,0453s
100	0,0441s

De todo esto podemos confirmar la conclusión anterior de que pese a aumentar el numero de mediciones este observador no tendrá una desviación estándar menor a 0.05s. Luego de haber realizado las doscientas mediciones, podemos extraer varios datos importantes para futuras mediciones. Primero hemos aplicado y demostrado experimentalmente las teorías estadísticas antes mencionadas y vimos que se cumplen los comportamiento esperados. Pero también pudimos sacar conclusiones sobre "nuestra forma de medir". La conclusión es que generalmente alcanza tomar una serie de diez mediciones, luego una de veinte, y si las desviaciones coinciden en el orden de magnitud se puede adoptar un $\xi = S/\sqrt{n}$. Pero puede suceder que esta última igualdad en algunos casos esto no se cumpla. Por lo que se tiene que prestar especial atención en los valores aislados, pues pueden ser estos los causantes de no se verifique la igualdad.

Bibliografía consultada: "Mecánica elemental" de Juan G. Roederer.