

Entropía de agujeros negros y correlaciones cuánticas

Román Orús[†]

[†]*Departament d'Estructura i Constituents de la Matèria,
Universitat de Barcelona, 08028. Barcelona, España.*

Only entropy comes easy

Anton Chekhov

Agradecimientos

Este trabajo debe gran parte a Roberto Emparan, a quien agradezco el haber accedido a dirigir uno de mis trabajos para la obtención del DEA, así como las muy interesantes y fructíferas discusiones que hemos tenido en referencia al tema que aquí se expone, y en las que he aprendido muchas cosas que me eran del todo desconocidas. Debo agradecer igualmente a José Ignacio Latorre, quien además de dirigir mi tesis doctoral, me animó originariamente a escoger este trabajo y a contactar con Roberto. También merecen mención el resto de mis compañeros de doctorado, quienes tienen la cruz de soportarme todos los días con una paciencia estoica y sin los cuales mi vida departamental sería demasiado aburrida, así como el resto de mis amigos y mi familia.

Índice general

1. Introducción y motivación	7
1.1. Agujeros negros	8
1.2. Termodinámica de agujeros negros	10
1.3. Dos problemas abiertos	12
2. Srednicki: traza parcial del vacío	15
2.1. Entropía de Von Neumann	15
2.2. Cálculo explícito	16
3. Espacio de Rindler y agujeros negros	23
3.1. Coordenadas de Rindler	23
3.2. Límite de masa infinita de un agujero negro	26
3.3. Efecto Unruh	27
4. Susskind y Uglum: recuento de modos	29
4.1. Cálculo explícito	29
5. Kabat: propagador en el cono	35
5.1. Cálculo explícito	35
6. Discusión y conclusiones	39
A. Estado térmico de Rindler	43

Capítulo 1

Introducción y motivación

Hacia la década de los 70, la relatividad general de Einstein era ya una teoría mayoritariamente aceptada a la vez que consolidada, y los esfuerzos de una gran parte de la comunidad de físicos se dirigían hacia la búsqueda de una teoría cuántica de la gravedad. Ya por entonces se sabía que éste no era un problema sencillo. Pese a todo, Hawking obtuvo un resultado muy notable mediante el uso de una aproximación semiclásica a dicho problema: demostró que los agujeros negros, predichos por la teoría de la gravitación de Einstein, no son “negros”, sino que emiten radiación térmica correspondiente a una cierta temperatura, y se evaporan. Otro resultado, conjuntamente de Penrose, Floyd, Christodoulou y Hawking, demostró que el área del horizonte de sucesos de un agujero negro nunca puede decrecer bajo ningún concepto, desde el punto de vista clásico. Éstos resultados estimularon el incipiente campo de la *termodinámica de agujeros negros*, la cual estudiaba los procesos en los que intervienen agujeros negros en términos de variables tales como temperatura, entropía o energía.

Gran parte de las nuevas preguntas que se generaron a raíz de aquellos resultados siguen vigentes en la actualidad, y son motivo de estimulante discusión en la comunidad de físicos: ¿desaparece la información en presencia de agujeros negros?, ¿cuál es el significado microscópico de la entropía de un agujero negro?, y más genéricamente, ¿cuál es el buen camino para elaborar una teoría cuántica de la gravitación? Estos son, hoy por hoy, algunos de los grandes problemas con que se enfrenta la física teórica, y ya hay quien afirma que son el preámbulo de un nuevo cambio de paradigma, como el que vivimos a principios del siglo XX con el advenimiento de la mecánica cuántica y la relatividad especial.

En este capítulo damos una idea general del contexto en el que se genera la pregunta en torno a la cual orbita nuestro trabajo: ¿qué es la entropía de un agujero negro? Para ello, recordamos el concepto de agujero negro en el marco de la teoría de la relatividad general, hacemos una introducción a las ideas básicas de la termodinámica de agujeros negros, y mencionamos algunas de las paradojas y preguntas que se generan en torno al tema.

1.1. Agujeros negros

Los agujeros negros hicieron su aparición en física cuando el científico británico John Michell [1] y el matemático y astrónomo francés P. S. de Laplace [2] hicieron notar independientemente que una estrella de masa lo suficientemente grande en comparación a su radio no puede ser observada por su propia luz emitida, ya que para tal configuración la velocidad de escape es mayor que la velocidad de los corpúsculos de luz. La relatividad general, la cual constituye la moderna teoría de la gravitación, precisó aún más la definición de “agujero negro”: no se trata sólo de una región de la cual la luz no puede escapar, sino de una región del espacio-tiempo aislada causalmente de su entorno, en el sentido de que ninguna señal, sea luz, partícula masiva, o lo que sea, puede aportar *información* acerca de su naturaleza y estado a las regiones de su exterior. La frontera que separa causalmente el interior del exterior del agujero negro se denomina comúnmente *horizonte de sucesos*.

El ejemplo mejor conocido es el agujero negro de Schwarzschild [3], el cual viene determinado por la métrica

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 . \quad (1.1)$$

En esta solución de las ecuaciones de Einstein existe un único parámetro, M , que corresponde con la masa del agujero negro. Hay un horizonte de sucesos a $r = 2M$, el cual es una singularidad del sistema de coordenadas (singularidad aparente), ya que la curvatura es perfectamente regular en ese punto (se pueden escoger coordenadas de Kruskal regulares en esa región). Sin embargo, hay una auténtica singularidad de curvatura en el punto $r = 0$, donde la curvatura del espacio-tiempo diverge.

En general, un agujero negro puede tener más parámetros que simplemente M (la masa). Si imaginamos que se ha formado mediante el colapso de un disco de materia, el agujero negro puede finalmente poseer además

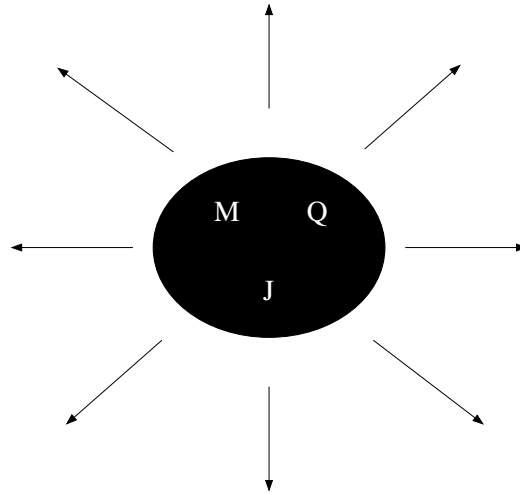


Figura 1.1: los tres observables clásicos de un agujero negro: masa (M), carga eléctrica (Q) y momento angular (J), el cual es responsable de la forma elíptica del dibujo. El resto de detalles se emiten en forma de radiación durante el colapso (flechas).

una cierta carga eléctrica y un cierto momento angular, correspondientes a la carga y al momento angular de la materia que colapsa. En relatividad general, todas las soluciones correspondientes a agujeros negros estacionarios cargados y en rotación forman una familia que depende de tres parámetros, el denominado “agujero negro de Kerr-Newman”. Remitimos a [4] al lector interesado en conocer la forma explícita de esta métrica. Un hecho importante es que *todos* los agujeros negros, en la teoría de la gravitación estándar, vienen descritos por la solución de Kerr-Newman y por lo tanto sólo por tres parámetros: masa (M), carga (Q) y momento angular (J). En este sentido se concibe a los agujeros negros como los objetos macroscópicos más perfectos del universo, puesto que dependen tan sólo de estas tres variables. El resto de detalles particulares de la materia que colapsó para formar el agujero negro (momentos cuadrupolares, etc) se radian en el proceso de colapso en forma de ondas electromagnéticas y gravitatorias, de forma que el objeto final tan sólo se describe en términos de las tres magnitudes anteriormente mencionadas. Debido a esto, típicamente se dice que los agujeros negros “no tienen pelo” (ver Fig.(1.1)).

Una particularidad interesante del fenómeno de los agujeros negros es que es invariante de escala. Un planeta es un planeta sólo si su masa se

encuentra entre una fracción de la masa de la Tierra y unas pocas veces la masa de Júpiter. A pesar de que la ley de gravitación de Newton no tiene una escala preferida, las estrellas y planetas existen sólo dentro de diferentes rangos de masa debido a las escalas inherentes a la materia de la que estos objetos se forman. Por el contrario, un agujero negro puede tener clásicamente cualquier masa. Esto es así dado que las leyes de la relatividad general (de igual manera que la antigua formulación de Newton) no involucran ninguna escala preferida, y porque un agujero negro es independiente de cualquier materia (la cual tiene escalas) a partir de la cual se ha originado. Los efectos cuánticos matizan esta afirmación: un agujero negro no puede tener una masa inferior a la masa de Planck ($\sim 2 \times 10^{-5}$ g).

Otro aspecto importante es la ley de crecimiento del área del horizonte en procesos que involucran a agujeros negros. Penrose y Floyd [5], Christodoulou [6] y Hawking [7] demostraron independientemente que, clásicamente, durante cualquier proceso de transformación de un agujero negro, el área A de su horizonte de sucesos bien aumentará ó no variará, pero nunca disminuirá bajo ninguna circunstancia. Este *teorema del área* muestra por ejemplo que dos agujeros negros pueden colisionar para formar un agujero negro final con un horizonte de sucesos mayor, pero que nunca un agujero negro se puede dividir en dos de manera espontánea. Estos resultados son *clásicos*, y la introducción de efectos mecánico-cuánticos lleva a limitaciones del teorema en sí (lo que no le resta importancia al resultado clásico original).

1.2. Termodinámica de agujeros negros

La termodinámica proporciona una descripción exitosa de un sistema físico siempre y cuando éste se pueda describir en términos de unos pocos parámetros: energía, volumen, presión, magnetización... al menos a una escala lo suficiente grande (sin entrar en detalles microscópicos). Acabamos de ver que un agujero negro se puede describir completamente, para un observador externo, en términos de tres variables: masa, carga eléctrica y momento angular, sin importar los detalles de la materia que intervino en su proceso de formación. Por lo tanto, parece que una descripción termodinámica de un agujero negro pueda resultar conveniente para este sistema.

¿Cuáles son las variables relevantes en nuestro caso? La masa del agujero negro M juega el papel de la energía, siendo ésta un parámetro típicamente termodinámico. En la termodinámica usual también se tratan sistemas car-

gados y en rotación, por lo que Q y J son también variables termodinámicas aceptables. Pero para tener una descripción termodinámica completa de un agujero negro aún se necesita la entropía. El hecho remarcable de que el área del horizonte de sucesos A siempre tienda a aumentar, de acuerdo con el teorema del área, sugiere de manera clara que ésta viene esencialmente a representar la entropía del agujero negro. Por otra parte, la existencia de un horizonte de sucesos impone restricciones a la información que pueda tener un observador externo de lo que pasa en el interior del agujero negro, lo que debe conllevar una entropía asociada, la cual se mediría en términos de alguna cantidad geométrica únicamente relacionada con el horizonte. Éste es otro aspecto a favor de la interpretación del área A como media de la entropía.

Y, ¿qué decir respecto a la temperatura? Hawking [8] demostró que, si se tienen en cuenta correcciones cuánticas a las ecuaciones de Einstein, un agujero negro emite radiación que corresponde con la de un cuerpo negro a una cierta temperatura. Esta temperatura, para un agujero negro de Schwarzschild, viene dada por la expresión

$$T = \frac{1}{8\pi M} = \frac{\kappa}{2\pi} , \quad (1.2)$$

donde κ es la llamada *gravedad en la superficie*. La temperatura de la expresión anterior es una temperatura real, observable, y que se puede asociar por tanto al agujero negro. Por ende, los agujeros negros muy masivos serán muy fríos, mientras que los poco masivos serán muy calientes. La importancia de este resultado no se debe infravalorar, pues demostró la conexión entre las leyes gobernantes de los agujeros negros con la termodinámica.

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, las leyes de la termodinámica de agujeros negros se formulan de manera análoga a las leyes de la termodinámica usual:

- La ley cero afirma que la gravedad en la superficie κ permanece constante en el horizonte del agujero negro.
- La primera ley afirma que

$$\frac{\kappa dA}{8\pi} = dM - \phi dQ - \Omega dJ , \quad (1.3)$$

siendo ϕ y Ω los potenciales termodinámicos correspondientes ¹.

¹Una deducción detallada de esta expresión se puede obtener diferenciando la expresión

- La segunda ley afirma que el área del horizonte de sucesos nunca puede decrecer (ley del área)

De todo lo establecido hasta ahora, para un agujero negro de Schwarzschild se desprende que $TdS = dM$ (primera ley), e integrando obtenemos que

$$S = 4\pi M^2 = \frac{A}{4}, \quad (1.4)$$

lo que establece el valor de la entropía asociada a este tipo de agujero negro. Vemos que, efectivamente, ésta es proporcional al área del horizonte de sucesos A , respondiendo así a las expectativas anteriormente mencionadas.

1.3. Dos problemas abiertos

Todo lo mencionado en el apartado anterior supuso un punto de vista ciertamente novedoso a la hora de entender los procesos en los que los agujeros negros juegan un papel importante. No por ello estaba libre de dudas, sino todo lo contrario: aparecieron preguntas al respecto, y algunas de ellas siguen siendo tema central de debate en la actualidad. Mencionamos en esta sección dos de ellas: la paradoja de la “pérdida de información”, y el problema de la interpretación microscópica de la entropía, concentrándonos en ésta última en el resto del presente trabajo.

La paradoja de la “pérdida de información” [10] afirma lo siguiente: podemos imaginar que un agujero negro se forma a partir de materia en un estado cuántico puro $|\psi\rangle$. Una vez la materia ha colapsado y se forma el agujero negro, éste emite radiación térmica correspondiente a una cierta temperatura, por lo que el objeto se evapora. La radiación emitida al exterior es radiación térmica, y viene descrita por lo tanto por un estado mezcla ρ y no por un estado puro. Una vez el agujero negro se ha evaporado completamente, toda la materia que inicialmente estaba descrita por un estado puro pasa a estar descrita por un estado mezcla. Claramente, esto es imposible dentro del marco de la mecánica cuántica convencional, dado que no se trata de una transformación unitaria, y además involucra pérdida de información. ¿Puede

del área del horizonte de sucesos de manera explícita, obteniendo la expresión para los potenciales termodinámicos y también para la temperatura. Remitimos al lector interesado a, por ejemplo, [9]

esto verdaderamente ocurrir? Hasta el momento se han propuesto tres tipos de soluciones a la paradoja:

(i) Si. La gravedad cuántica es una teoría no unitaria, y las leyes de la mecánica cuántica deberían ser modificadas y acomodarse a este proceso.

(ii) No. La naturaleza térmica de la radiación es sólo una aproximación. Existen correlaciones entre la radiación emitida en diferentes instantes, y el estado final es puro.

(iii) No. El proceso de evaporación se detiene en algún punto aún por determinar por efecto de una aún desconocida teoría de la gravedad cuántica. Esto implica que el agujero negro deja un remanente tras la evaporación.

Es importante poner énfasis en que cada una de estas propuestas involucra una nueva física aún por conocer².

El segundo problema al que hacemos mención en este apartado es el de la interpretación microscópica de la entropía. Ya vimos en el apartado anterior que a un agujero negro se le puede asociar una entropía, siendo ésta proporcional al área. Lejos de estar satisfechos, nos formulamos ahora la siguiente pregunta: ¿cuál es el origen microscópico de esta entropía? En la termodinámica usual, sabemos que la entropía térmica de un gas de moléculas, o la de un cierto material magnético, tiene que ver con el número de estados microscópicos accesibles para un estado macroscópico determinado. Sabemos que, por ejemplo, a partir del cómputo de los estados microscópicos posibles de un gas, podemos obtener con rigor el valor de su entropía a una cierta temperatura. Conocemos ahí el *origen* de la entropía. En el caso de un agujero negro, ¿qué es lo relevante? ¿Se trata de la entropía asociada a la pérdida de correlaciones cuánticas a través del horizonte? ¿Tiene que ver con el recuento de los estados asociados a alguna posible “membrana dinámica” en el horizonte? ¿Puede tener relación con los grados de libertad de la materia que ha colapsado? ¿Se puede obtener a partir del cómputo de los estados cuánticos accesibles del agujero negro? Claramente las posibilidades son muchas, y el problema, a día de hoy, sigue abierto. Este problema muestra claramente las limitaciones de las actuales teorías físicas, y supone uno de los desafíos modernos de la física teórica. Una solución satisfactoria de

²Cálculos recientes de teoría de cuerdas han mostrado como bastante improbable la solución (iii), a la vez que favorecen la solución propuesta por (ii).

éste involucra de nuevo una física que aún está por descubrir. En el resto del trabajo intentaremos hacer una presentación de tres ataques diferentes a este problema basados en el concepto de “entropía cuántica de Von Neumann”, que si bien no aportan una solución definitiva, sí proporcionan intuición física al respecto, así como motivación para futuras investigaciones.

Capítulo 2

Srednicki: traza parcial del vacío

En este capítulo presentamos el cálculo de M. Srednicki [11] de la entropía de Von Neumann, o entropía de entrelazamiento¹, correspondiente a la traza parcial del vacío de un campo escalar sin masa tras dividir el espacio en las regiones interior y exterior de una esfera. Inicialmente recordamos lo que es la entropía de entrelazamiento, para dar posteriormente paso al cálculo explícito.

2.1. Entropía de Von Neumann

Imaginemos que tenemos un sistema físico representado por un estado puro $|\psi_{AB}\rangle$, el cual describe el estado conjunto de dos subsistemas A y B . Llamemos $\rho_A = \text{tr}_B(|\psi_{AB}\rangle\langle\psi_{AB}|)$ a la matriz densidad reducida correspondiente al subsistema A , la cual se obtiene traceando el subsistema B de la matriz densidad total (ρ_B se define de manera análoga). Estos dos subsistemas están, en principio, entrelazados por medio de correlaciones cuánticas. ¿Cómo medir la magnitud o intensidad de las correlaciones entre ambos? Una posible forma es mediante la entropía de Von Neumann, o entropía de entrelazamiento. Para una matriz densidad σ ésta se calcula mediante la expresión

$$S(\sigma) = -\text{tr}(\sigma \log_2(\sigma)) . \quad (2.1)$$

Para el caso del sistema bipartito, se puede comprobar fácilmente que $S(\rho_A) = S(\rho_B)$, dado que las dos matrices densidad reducidas poseen exactamente

¹En la terminología anglosajona, es la denominada entropía de *entanglement*.

los mismos autovalores. Esta cantidad es una medida de *cuánta correlación cuántica existe entre A y B* , o lo que es lo mismo, el entrelazamiento entre A y B . Si los dos subsistemas están descorrelacionados cuánticamente (estado separable), la entropía es cero. Sin embargo, esta cantidad es no nula siempre que haya alguna correlación cuántica. Así mismo, se ha demostrado que esta cantidad es una buena medida del entrelazamiento bipartito para estados puros [12].

Como era de esperar, dado que las correlaciones cuánticas entre A y B no se pueden localizar en ninguno de los dos subsistemas (correlaciones no locales), $S(\rho_A) = S(\rho_B)$, lo que quiere decir que la entropía sólo depende de aquellas características que comparten los subsistemas A y B . Desde el punto de vista analítico, se trata del espectro de autovalores. Desde el punto de vista geométrico, lo único que comparten dos regiones separadas de un cierto espacio, es su frontera. Es de esperar pues que la entropía escale con el área de la frontera de la bipartición que hacemos en el sistema. Este hecho es inspirativo, pues recordemos que la entropía de un agujero negro (ver ecuación (1.4)) escala con el área del horizonte de sucesos. Así, podría ser que una contribución a esta entropía venga de las correlaciones cuánticas que existen entre los grados de libertad interiores y exteriores al horizonte del agujero negro, cuando se considera éste en presencia de campos cuánticos.

2.2. Cálculo explícito

El cálculo de Srednicki que reproducimos a continuación considera un campo escalar sin masa en un espacio dividido en el interior y el exterior de una esfera imaginaria de radio R , y calcula la entropía de entrelazamiento del estado fundamental de la teoría entre las regiones interior y exterior. El objetivo es determinar cómo escala la entropía con R .

Iniciamos la discusión con un problema más sencillo: el caso de dos osciladores armónicos acoplados, con Hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2 + k_0(x_1^2 + x_2^2) + k_1(x_1 - x_2)^2) . \quad (2.2)$$

El estado fundamental normalizado viene dado por la función de onda

$$\psi_0(x_1, x_2) = \frac{(\omega_+ \omega_-)^{1/4}}{\sqrt{\pi}} \exp(-(\omega_+ x_+^2 + \omega_- x_-^2)/2) , \quad (2.3)$$

donde $x_{\pm} = (x_1 \pm x_2)/\sqrt{2}$, $\omega_+ = k_0^{1/2}$ y $\omega_- = (k_0 + 2k_1)^{1/2}$. A partir de la matriz densidad del estado fundamental, vamos a continuación a trazar el primero de los osciladores (oscilador “in”) de forma que nos quede la matriz densidad del segundo oscilador (oscilador “out”):

$$\begin{aligned}\rho_{\text{out}}(x_2, x'_2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \psi_0(x_1, x_2) \psi_0^*(x_1, x'_2) \\ &= \frac{(\gamma - \beta)^{1/2}}{\sqrt{\pi}} \exp(-\gamma(x_2^2 + x'^2_2)/2 + \beta x_2 x'_2) ,\end{aligned}\quad (2.4)$$

donde se ha definido $\beta = \frac{1}{4}(\omega_+ - \omega_-)^2/(\omega_+ + \omega_-)$ y $(\gamma - \beta) = 2\omega_+\omega_-/(\omega_+ + \omega_-)$. Queremos ahora diagonalizar esta matriz densidad y encontrar sus (infinitos) autovalores p_n :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx' \rho_{\text{out}}(x, x') f_n(x') = p_n f_n(x) , \quad (2.5)$$

ya que en términos de los autovalores la entropía adquiere la forma simple $S = -\sum_n p_n \log_2 p_n$. El problema de valores propios definido por la ecuación (2.5) se puede solucionar, dando los autovalores y autovectores

$$\begin{aligned}p_n &= (1 - \xi)\xi^n \\ f_n(x) &= H_n(\alpha^{1/2}x) \exp(-\alpha x^2/2) ,\end{aligned}\quad (2.6)$$

donde H_n es un polinomio de Hermite, $\alpha = (\gamma^2 - \beta^2)^{1/2} = (\omega_+\omega_-)^{1/2}$, $\xi = \beta/(\gamma + \alpha)$, y n va desde cero hasta infinito. La entropía de entrelazamiento entre los dos osciladores viene dada finalmente por

$$S(\xi) = -\log_2(1 - \xi) - \left(\frac{\xi}{1 - \xi}\right) \log_2 \xi . \quad (2.7)$$

El análisis realizado para el caso de dos osciladores se puede extender al caso de un sistema de N osciladores armónicos acoplados con Hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N p_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N x_i K_{ij} x_j , \quad (2.8)$$

donde la matriz K es real, simétrica y de autovalores positivos. La función de onda del estado fundamental viene dada por la gaussiana

$$\psi_0(x_1, \dots, x_N) = \frac{(\det \Omega)^{1/4}}{\pi^{N/4}} \exp(-x \cdot \Omega \cdot x/2) , \quad (2.9)$$

donde $\Omega = K^{1/2}$ y $x \equiv (x_1, \dots, x_N)$. Traceamos ahora sobre los primeros n osciladores (osciladores “in”):

$$\begin{aligned} \rho_{\text{out}}(x_{n+1}, \dots, x_N; x'_{n+1}, \dots, x'_N) &= \int \prod_{i=1}^n dx_i \psi_0(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_N) \\ &\times \psi_0^*(x_1, \dots, x_n, x'_{n+1}, \dots, x'_N) . \end{aligned} \quad (2.10)$$

Podemos llevar a cabo la integración dividiendo la matriz Ω en las variables traceadas y las no traceadas. Explícitamente:

$$\Omega = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix} , \quad (2.11)$$

donde A es una matriz $n \times n$ y C es una matriz $(N - n) \times (N - n)$. El comportamiento de la matriz densidad reducida viene dado, salvo normalización, por

$$\rho_{\text{out}}(x, x') \sim \exp(-(x \cdot \gamma \cdot x + x' \cdot \gamma \cdot x')/2 + x \cdot \beta \cdot x') , \quad (2.12)$$

donde $\beta = \frac{1}{2}B^T A^{-1}B$, $\gamma = C - \beta$ y $x \equiv (x_{n+1}, \dots, x_N)$.

Nos proponemos a continuación encontrar los autovalores de esta matriz densidad. Para ello, notamos que la ecuación (2.5) implica que los autovalores de $\rho_{\text{out}}(x, x')$ son los mismos que los de $(\det(G))\rho_{\text{out}}(Gx, Gx')$, donde G es cualquier matriz no singular de cambio lineal de coordenadas. Escribamos $\gamma = V^T \gamma_D V$, donde γ_D es diagonal y V es una matriz ortogonal. consideremos a continuación la transformación $x = V^T \gamma_D^{-1/2} y$, la cual esta bien definida puesto que los autovalores de γ son positivos. Rescribiendo la matriz densidad en términos de estas nuevas variables, obtenemos

$$\rho_{\text{out}}(y, y') \sim \exp(-(y \cdot y + y' \cdot y')/2 + y \cdot \beta' \cdot y') , \quad (2.13)$$

donde hemos definido $\beta' = \gamma_D^{-1/2} V \beta V^T \gamma_D^{-1/2}$. Diagonalizando β' mediante una matriz ortogonal W , y en términos de las nuevas coordenadas $z = W^T y$, la expresión final para la matriz densidad es

$$\rho_{\text{out}}(z, z') \sim \prod_{i=n+1}^N \exp(-(z_i^2 + z_i'^2)/2 + \beta'_i z_i z_i') , \quad (2.14)$$

donde β'_i son los autovalores de la matriz β' . El punto importante aquí es que cada término del productorio de la ecuación anterior es idéntico a la

ρ_{out} obtenida en la ecuación (2.4), con los cambios $\gamma \leftrightarrow 1$ y $\beta \leftrightarrow \beta'_i$. Por lo tanto, la entropía asociada a la matriz densidad de la ecuación (2.13) es simplemente $S = \sum_i S(\xi_i)$, donde $S(\xi)$ viene dado por la ecuación (2.7), con $\xi_i = \beta'_i / (1 + (1 - \beta_i'^2)^{1/2})$.

Nuestro propósito ahora es aplicar este resultado al caso en el que tenemos un campo escalar cuántico sin masa en el espacio, descrito por el Hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2} \int d^3x (\pi^2(\vec{x}) + |\nabla\varphi(\vec{x})|^2) . \quad (2.15)$$

Introducimos a continuación las componentes en ondas parciales

$$\begin{aligned} \varphi_{lm}(x) &= x \int d\Omega Z_{lm}(\theta, \phi) \varphi(\vec{x}) \\ \pi_{lm}(x) &= x \int d\Omega Z_{lm}(\theta, \phi) \pi(\vec{x}) , \end{aligned} \quad (2.16)$$

donde $x = |\vec{x}|$ y Z_{lm} son los armónicos esféricos reales: $Z_{l0} = Y_{l0}$, $Z_{lm} = \sqrt{2} \operatorname{Re} Y_{lm}$ para $m > 0$, y $Z_{lm} = \sqrt{2} \operatorname{Im} Y_{lm}$ para $m < 0$. Las funciones Z_{lm} forman un conjunto ortonormal y completo. Los operadores definidos en la ecuación (2.16) son hermíticos y obedecen las reglas de conmutación canónicas

$$[\varphi_{lm}(x), \pi_{l'm'}(x')] = i\delta_{ll'}\delta_{mm'}\delta(x - x') . \quad (2.17)$$

Podemos rescribir $H = \sum_{lm} H_{lm}$, donde

$$H_{lm} = \frac{1}{2} \int_0^\infty dx \left(\pi_{lm}^2(x) + x^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\varphi_{lm}(x)}{x} \right) \right)^2 + \frac{l(l+1)}{x^2} \varphi_{lm}^2(x) \right) . \quad (2.18)$$

Llegados a este punto nos es necesario regular la teoría. Sustituimos el espacio continuo por una red, de forma que la coordenada radial x pasa a tomar valores sólo en los puntos discretos de la red con separación a . El corte² ultravioleta viene dado por a^{-1} . Como regulador infrarrojo, decidimos poner el sistema en una caja esférica de radio $L = (N+1)a$, donde N es un entero muy grande, y exigimos que las funciones $\varphi_{lm}(x)$ sean nulas para $x \geq L$. El corte infrarrojo viene dado por L^{-1} . En términos de estos parámetros, el

²En la terminología anglosajona, *cutoff*.

Hamiltoniano en la red se escribe

$$H_{lm} = \frac{1}{2a} \sum_{j=1}^N \left(\pi_{lm,j}^2 + (j + \frac{1}{2})^2 \left(\frac{\varphi_{lm,j}}{j} - \frac{\varphi_{lm,j+1}}{j+1} \right)^2 + \frac{l(l+1)}{j^2} \varphi_{lm,j}^2 \right), \quad (2.19)$$

donde $\varphi_{lm,N+1} = 0$. $\varphi_{lm,j}$ y $\pi_{lm,j}$ son operadores sin dimensiones y hermíticos, y verifican las leyes de conmutación canónicas

$$[\varphi_{lm,j}, \pi_{l'm',j'}] = i\delta_{ll'}\delta_{mm'}\delta_{jj'}. \quad (2.20)$$

Observamos que H_{lm} tiene la forma genérica del Hamiltoniano de la ecuación (2.8), por lo que podemos calcular la entropía $S_{lm}(n, N)$ producida al tracear los primeros n puntos del estado fundamental (vacío de la teoría) de H_{lm} . El vacío de H es un producto directo del vacío de cada H_{lm} , por lo que la entropía total se obtiene sumando sobre todos los l y m , $S(n, N) = \sum_{lm} S_{lm}(n, N)$. Puesto que la ecuación (2.19) no depende de m , se desprende que $S_{lm}(n, N) = S_l(n, N)$. La suma sobre m contribuye con un factor $2l + 1$, por lo que la entropía será $S(n, N) = \sum_l (2l + 1) S_l(n, N)$. Definiendo ahora la cantidad $R \equiv (n + \frac{1}{2})a$, siendo éste un radio a medio camino entre el último punto traceado y el primero sin tracear, Srednicki evaluó numéricamente la suma $S(n, N) = \sum_l (2l + 1) S_l(n, N)$ para $N = 60$ y $1 \leq n \leq 30$, y observó su comportamiento de escala respecto a R^2 . Determinó que los puntos siguen la ley

$$S = 0,3 \left(\frac{R^2}{a^2} \right), \quad (2.21)$$

la cuál se puede obtener a partir de los datos de la Fig.(2.1) (gráfico original de Srednicki).

La ley obtenida en la ecuación (2.21) guarda tremendas similitudes con la ley hallada mediante argumentos puramente termodinámicos para agujeros negros (ecuación (1.4)). La más notable de ellas es el hecho de que ambas escalan con el área de la región a la que no tenemos acceso (en el cálculo aquí presentado, la región sobre la que se hace la traza parcial). Éste resultado demuestra que la ley de área para el escalamiento de la entropía es algo muy general, y se puede obtener directamente a partir de la entropía de Von Neumann, la cual mide la pérdida de información cuando nos olvidamos de una parte del universo (en este caso, una esfera de radio R). El resultado aquí presentado apoya el punto de vista de que, al parecer, una posible contribución a la entropía de un agujero negro pueda ser debida a la entropía de

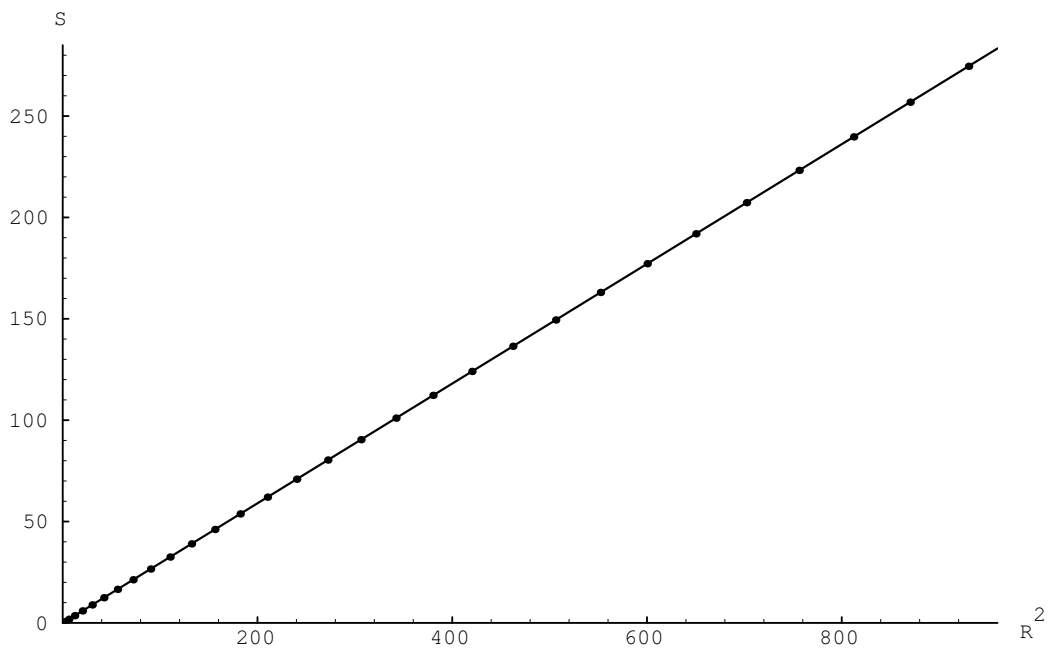


Figura 2.1: comportamiento de escala de la entropía de entrelazamiento con el área de la región traceada (original de Srednicki).

entrelazamiento, además de arrojar luz al motivo por el cual ésta escala con el área (y no con el volumen) de la región inaccesible.

Desearíamos asimismo comentar que el cálculo realizado ha sido hecho exclusivamente para un campo escalar sin masa. Otro tipo de campos (con masa, espinoriales...) darían lugar al mismo comportamiento de escala, si bien el comportamiento del coeficiente de R^2 sería diferente. Por supuesto, para tener en cuenta todas las posibles especies de campos, uno debería sumar todas las posibles contribuciones de cada especie a la entropía, obteniendo así una suma sobre todas las posibles especies para el coeficiente de R^2 . Si la entropía de un agujero negro pudiera calcularse de este modo, la suma sobre todas las especies de partículas presentes en el universo debería dar lugar al factor $\frac{1}{4}$ de la ecuación (1.4). Éste es el denominado *problema de las especies*, y hay quien incluso le da la vuelta al problema, y -haciendo un acto de fe- afirma que el factor $\frac{1}{4}$ de la entropía ha de servir para calibrar las diferentes especies de partículas presentes en nuestro universo.

Capítulo 3

Espacio de Rindler y agujeros negros

En este capítulo introducimos la noción de espacio de Rindler (coordenadas de Rindler), observando en primer lugar las similitudes que éste tiene con el espacio-tiempo de un agujero negro, y demostrando en segundo lugar que el mismo se puede obtener a partir de la métrica de un agujero negro en una cierta situación límite (masa infinita). Finalmente, mencionamos muy brevemente las características principales del efecto Unruh, al cual nos referiremos de nuevo en posteriores capítulos.

3.1. Coordenadas de Rindler

Introducimos las coordenadas de Rindler (ξ, τ) en el plano $x - t$ a partir de la siguiente transformación, la cual es regular en la región $x > |t|$ (la llamada “zona de Rindler”):

$$\begin{aligned}x &= \xi \cosh \tau \\t &= \xi \sinh \tau .\end{aligned}\tag{3.1}$$

Tras este cambio de coordenadas, la métrica de Minkowski para un espacio-tiempo plano se escribe como

$$ds^2 = -\xi^2 d\tau^2 + d\xi^2 + dy^2 + dz^2 ,\tag{3.2}$$

siendo y y z las coordenadas espaciales transversales. Es un hecho bien conocido (ver, por ejemplo, [3]) que este cambio de coordenadas corresponde a las

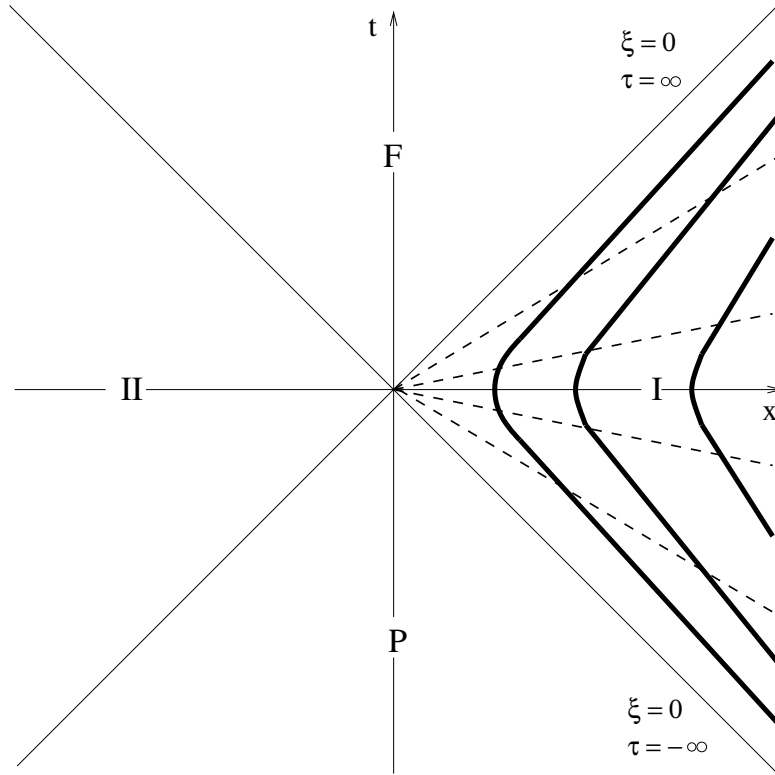


Figura 3.1: coordenadas de Rindler. Las trayectorias $\xi = \text{cte}$ son hipérbolas y corresponden a un observador uniformemente acelerado, mientras que las trayectorias $\tau = \text{cte}$ son líneas rectas. El cambio de coordenadas está bien definido en la región $x > |t|$, la llamada “zona de Rindler”.

trayectorias en el espacio-tiempo minkowskiano de una partícula (observador) uniformemente acelerada, con aceleración propia constante de valor ξ^{-1} , siendo $\xi\tau$ el tiempo propio a lo largo de las curvas $\xi = \text{cte}$. La representación diagramática de estas trayectorias se puede ver en la Figura 3.1.

Una característica importante de la estructura del espacio-tiempo de Minkowski expresado en coordenadas de Rindler, es la aparición de un horizonte que mantiene desconectadas causalmente regiones del espacio-tiempo. Para ver esto, observamos que las curvas $\xi = \text{cte}$ son todas asintóticas a los planos $x = \pm t$. A partir del dibujo de la Figura 3.1 queda claro que estos planos son horizontes, puesto que un observador siguiendo una de las líneas $\xi = \text{cte}$ no puede mandar información a las regiones **II** y **P** del espacio-tiempo, a

la vez que no puede recibir ninguna información de las regiones **II** y **F**. Un observador uniformemente acelerado se moverá siempre dentro de la región **I**, y quedará causalmente desconectado de la región **II**. Vemos pues que, por ejemplo, a $t = 0$ el origen de coordenadas en el plano $x - t$ es un horizonte entre **I** y **II**, puesto que desconecta las dos regiones causalmente para el observador uniformemente acelerado. Esta propiedad será importante en los próximos capítulos.

Las coordenadas de Rindler se pueden extender analíticamente a (casi) todo el espacio-tiempo, de la manera en que sigue:

■ Región **I**:

$$\begin{aligned} x &= \xi \cosh \tau \\ t &= \xi \sinh \tau . \end{aligned} \quad (3.3)$$

■ Región **F**:

$$\begin{aligned} x &= \xi \sinh \tau \\ t &= \xi \cosh \tau . \end{aligned} \quad (3.4)$$

■ Región **II**:

$$\begin{aligned} x &= -\xi \cosh \tau \\ t &= -\xi \sinh \tau . \end{aligned} \quad (3.5)$$

■ Región **P**:

$$\begin{aligned} x &= -\xi \sinh \tau \\ t &= -\xi \cosh \tau . \end{aligned} \quad (3.6)$$

Las trayectorias correspondientes a esta extensión son las que surgen de extender el tipo de trayectoria de la Figura 3.1 al resto de regiones del espacio-tiempo, y la métrica inducida por esta transformación viene dada por

$$ds^2 = \mp \xi^2 d\tau^2 \pm d\xi^2 + dy^2 + dz^2 , \quad (3.7)$$

donde los signos superiores corresponden a las regiones **I** y **II** y los inferiores a las regiones **F** y **P**. Es importante observar que este cambio de coordenadas

no está bien definido en los planos $x = \pm t$. A modo de apunte, es interesante ver el efecto de una rotación a tiempo imaginario en el espacio-tiempo de Rindler. Si imponemos $\tau = -i\theta$ en el plano $\xi - \tau$ de la métrica dada por la ecuación (3.2), obtenemos el elemento de línea

$$ds^2 = \xi^2 d\theta^2 + d\xi^2 + dy^2 + dz^2 . \quad (3.8)$$

Vemos que la parte (ξ, θ) de la métrica anterior describe un espacio plano de dos dimensiones en coordenadas polares. La métrica posee una singularidad cónica en $\xi = 0$, dependiendo de la periodicidad de la variable θ (siendo regular si el periodo de θ es 2π). Así mismo, si inicialmente rotamos el tiempo minkowskiano a valores imaginarios $t = -i\lambda$ y escribimos $\tau = -i\theta$, obtenemos que el cambio de coordenadas de Rindler se escribe en la forma

$$\begin{aligned} \lambda &= \xi \sin \theta \\ x &= \xi \cos \theta \end{aligned} \quad (3.9)$$

(restringiéndonos a la zona de Rindler). La expresión anterior hace que de nuevo interpretemos ξ y θ como coordenadas polares.

3.2. Límite de masa infinita de un agujero negro

En esta sección vamos a ver que el espacio-tiempo de Rindler y su estructura causal se puede obtener a partir de un comportamiento límite del espacio-tiempo de un agujero negro. Consideremos la métrica de Schwarzschild

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 , \quad (3.10)$$

y definamos a continuación las coordenadas τ y ξ de la forma

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{t}{4GM} \\ \xi &= \sqrt{8GM(r - 2GM)} . \end{aligned} \quad (3.11)$$

La métrica en las nuevas coordenadas viene dada por la expresión

$$ds^2 = - \xi^2 \left(1 + \frac{\xi^2}{16G^2M^2}\right)^{-1} d\tau^2 + \left(1 + \frac{\xi^2}{16G^2M^2}\right) d\xi^2 + 4G^2M^2 \left(1 + \frac{\xi^2}{16G^2M^2}\right)^2 d\Omega^2. \quad (3.12)$$

Tomando a continuación el límite de masa infinita del agujero negro, $M \rightarrow \infty$, el horizonte esférico de la singularidad se transforma en un horizonte planar, por lo que la subvariedad descrita por $r^2 d\Omega^2$ se describe por una métrica planar $dy^2 + dz^2$ con límites de la variedad en el infinito. Por lo tanto, dentro de este límite la ecuación (3.12) se transforma en la métrica de Rindler

$$ds^2 = -\xi^2 d\tau^2 + d\xi^2 + dy^2 + dz^2. \quad (3.13)$$

Vemos pues que el espacio-tiempo de Rindler aparece de manera natural como el límite de gran masa de un agujero negro de Schwarzschild, respetando la estructura causal de la existencia de un horizonte de sucesos (ya vimos en la sección anterior que el espacio-tiempo de Rindler da lugar a la aparición de regiones desconectadas causalmente). De cara a cálculos prácticos, es útil hacer uso de un corte infrarrojo de manera que $y, z \in [-L/2, L/2]$. De esta manera, el área del horizonte es finita y de valor L^2 . Las cantidades interesantes, tales como la entropía por unidad de área, se mantendrán bien definidas en el límite $L \rightarrow \infty$.

3.3. Efecto Unruh

A continuación exponemos muy brevemente y de forma introductoria las nociones principales del denominado “efecto Unruh”. En esta sección nos interesa centrarnos más en las ideas que en los cálculos detallados explícitos, dado que éstas aparecerán relacionadas a los desarrollos que expondremos en los próximos capítulos (para una información más detallada al respecto, ver por ejemplo [13]).

Consideremos el problema de cuantizar, por simplicidad, un campo escalar sin masa $\phi(x)$ usando coordenadas de Rindler en lugar de las coordenadas minkowskianas usuales. La ecuación de ondas

$$\square\phi = 0 \quad (3.14)$$

se puede separar en coordenadas de Rindler y posee soluciones correspondientes a modos normales de frecuencia positiva respecto al tiempo de Rindler

$$u_{\nu, \vec{k}}(\xi, \tau, \vec{x}) = C e^{-i\nu\tau} K_{i\nu}(k\xi) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} , \quad (3.15)$$

donde \vec{x} representa el vector (y, z) , ν es la frecuencia, $K_l(q)$ es una función modificada de Bessel de orden l , y C cierta constante de normalización. Podemos ahora expandir el operador campo $\hat{\phi}(x)$ en modos normales:

$$\hat{\phi}(x) = \int_0^\infty d\nu \int d^2\vec{k} (\hat{a}(\nu, \vec{k}) u_{\nu, \vec{k}}(x) + \text{h.c.}) , \quad (3.16)$$

donde por x entendemos el conjunto de variables (ξ, τ, y, z) en el espacio de Rindler.

Las reglas de conmutación canónicas imponen que

$$[\hat{a}(\nu, \vec{k}), \hat{a}^\dagger(\nu', \vec{k}')] = \delta(\nu - \nu') \delta(\vec{k} - \vec{k}') , \quad (3.17)$$

anulándose el resto de conmutadores independientes de éste. Definamos a continuación el *vacío* $|\Omega\rangle$ de la teoría de forma que éste se anihile tras la acción de los operadores de aniquilación que acabamos de presentar, es decir,

$$\hat{a}(\nu, \vec{k})|\Omega\rangle = 0 \quad \forall \nu, \vec{k} . \quad (3.18)$$

Unruh observó que la teoría así construida, en términos del vacío $|\Omega\rangle$ aniquilado por los operadores de aniquilación que surgen de cuantizar en coordenadas de Rindler, no es unitariamente equivalente a la teoría usual de un campo escalar libre en espacio-tiempo de Minkowski. Esto se puede entender debido al hecho de que los modos normales de vibración de la ecuación de onda han sido aquí elegidos con frecuencia positiva *respecto al tiempo de Rindler*, y no respecto al tiempo minkowskiano usual (hemos separado la ecuación en coordenadas de Rindler). Un cambio en la coordenada temporal involucra una redefinición del espectro positivo de frecuencias, por lo que en general los vacíos definidos a partir de las dos teorías (antes y después del cambio) no han de ser necesariamente idénticos. Una sorpresa aún más grande fue descubrir que el vacío $|\Omega\rangle$ contiene una distribución térmica de cuantos de energía de la teoría minkowskiana usual, correspondiente a una temperatura $T_R = \frac{1}{2\pi\xi}$. Esto significa que, mientras un observador minkowskiano observa un vacío sin partículas, un observador uniformemente acelerado observa un vacío lleno de cuantos de energía minkowskianos que siguen una distribución térmica. Éste es el denominado *efecto Unruh*.

Capítulo 4

Susskind y Uglum: recuento de modos

En este capítulo presentamos un cálculo alternativo realizado por Susskind y Uglum [14] de la entropía de entrelazamiento de un campo escalar masivo en presencia de un agujero negro de masa infinita, a partir del cómputo de modos de una teoría de campos térmica en espacio de Rindler. El cálculo se basa en el notable resultado de que la matriz densidad del vacío minkowskiano, una vez restringida a la “zona de Rindler”, corresponde a un estado térmico de temperatura $T = \frac{1}{2\pi}$, lo que es una manifestación particular del efecto Unruh (del cual hablamos en el capítulo precedente; ver también el apéndice A). De éste cálculo surgen numerosas similitudes con el anterior cálculo de Srednicki, como veremos.

4.1. Cálculo explícito

Supongamos que tenemos un sistema descrito por un Hamiltoniano H en equilibrio térmico a temperatura $\beta = 1/T$. El estado térmico del sistema viene dado por la matriz densidad

$$\rho = \frac{e^{-\beta H}}{Z} , \quad (4.1)$$

donde Z es la función de partición, definida por

$$Z = \text{tr}(e^{-\beta H}) = e^{-\beta F} , \quad (4.2)$$

siendo F la energía libre de Helmholtz. Es fácil ver que la entropía definida por $S = -\text{tr}(\rho \ln(\rho))$ ¹ se obtiene a partir de la expresión

$$S = \beta^2 \frac{\partial F}{\partial \beta} , \quad (4.3)$$

realizando variaciones respecto al parámetro β . La ecuación (4.2) para la función de partición se aplica a los casos de teorías cuánticas de campos propagándose en una variedad espacio-temporal estacionaria. En este caso, el concepto de “equilibrio térmico” tiene sentido, y se puede escoger un vector de Killing temporal y calcular la función de partición.

Para calcular la función de partición de un estado térmico como el de la ecuación (4.1) dada una teoría de campos, podemos hallar los modos normales de vibración del sistema, los cuales diagonalizan el Hamiltoniano H . Asumamos que tenemos un campo escalar ϕ de masa m que se propaga en el espacio de Rindler (llamémosle \mathcal{R}). La acción que describe la propagación del campo es

$$S[\phi] = -\frac{1}{2} \int_{\mathcal{R}} \epsilon_g ((\nabla \phi)^2 + m^2 \phi^2) , \quad (4.4)$$

donde la métrica g es la del espacio de Rindler (ver capítulo 3) y ϵ_g es el elemento de volumen correspondiente a g . La ecuación del movimiento viene dictada por la ecuación de Klein-Gordon en coordenadas de Rindler

$$(\nabla^2 - m^2)\phi = \left(-\frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - m^2 \right) \phi = 0 . \quad (4.5)$$

Para solucionar esta ecuación, se puede expandir el campo ϕ de la forma

$$\phi(x) = U(\xi) e^{-i\omega\tau} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} , \quad (4.6)$$

donde x representa al conjunto de coordenadas en espacio de Rindler (ξ, τ, y, z) , y $\vec{x} \equiv (y, z)$. Introducimos un regulador infrarrojo L en las coordenadas transversales de forma que $y, z \in [-L/2, L/2]$. Si imponemos condiciones de contorno periódicas en estas direcciones se obtiene $\vec{k} = \frac{2\pi}{L}(n^2, n^3)$, con $(n^2, n^3) \in \mathbb{Z}^2$. Definiendo $\mu \equiv \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$, la ecuación para la función $U(\xi)$ se

¹Hasta ahora hemos considerado el logaritmo en base dos. En este cálculo tomamos la base de los logaritmos naturales, dado que facilita el cálculo. La relación entre ambas entropías es simplemente una constante.

puede escribir como

$$\left(\frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{d}{d\xi} \right) - \frac{(i\omega)^2}{\xi} \right) U(\xi) = \mu^2 \xi U(\xi) , \quad (4.7)$$

que es la ecuación modificada de Bessel de orden $i\omega$, la solución más general de la cual viene dada por

$$U = AI_{i\omega}(\mu\xi) + BK_{i\omega}(\mu\xi) . \quad (4.8)$$

La función $I_{i\omega}(x)$ diverge cuando $x \rightarrow \infty$, por lo que se requiere que $A = 0$. En este punto imponemos un regulador ultravioleta a la teoría, exigiendo que la función U sea nula para $\xi = \epsilon$, con ϵ cercano a cero. Más adelante veremos que esto es necesario, puesto que la densidad de estados diverge en el límite $\epsilon \rightarrow 0$, que visto en coordenadas Minkowskianas corresponde al límite de acercarse al horizonte de sucesos que delimitan las coordenadas de Rindler, y desde el punto de vista de un agujero negro corresponde al límite de proximidad al horizonte (ver capítulo 3). Así pues, imponemos que

$$K_{i\omega}(\mu\epsilon) = 0 . \quad (4.9)$$

La ecuación anterior es una condición de cuantización para las frecuencias de Rindler ω . Podemos obtener una solución aproximada a esta ecuación como sigue: definimos $x = \ln(\mu\xi)$ y $E = \frac{1}{2}\omega^2$, de tal manera que la ecuación (4.7) se puede escribir como una ecuación de Schrödinger independiente del tiempo

$$\left(\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} e^{2x} \right) U(x) = EU \quad (4.10)$$

para una partícula de masa unidad, moviéndose en un potencial $V(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$ si $x > \ln(\mu\epsilon)$ y $V(x) = \infty$ si $x \leq \ln(\mu\epsilon)$. Los autovalores E de esta ecuación se pueden aproximar mediante el método WKB. Es fácil obtener los puntos de retorno clásicos de este potencial, que vienen dados por $x_0 = \ln(\mu\epsilon)$ y $x_1 = \ln(\omega)$. La condición de cuantización del método WKB viene entonces dada por

$$n\pi = \int_{\ln(\mu\epsilon)}^{\ln(\omega)} dx \sqrt{2(E - V(x))} . \quad (4.11)$$

La integral anterior se puede calcular explícitamente y se obtiene que

$$n = \frac{\omega}{2\pi} \left(\ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - (\mu\epsilon/\omega)^2}}{1 - \sqrt{1 - (\mu\epsilon/\omega)^2}} \right) - 2\sqrt{1 - (\mu\epsilon/\omega)^2} \right) , \quad (4.12)$$

la cual es una ecuación implícita para las frecuencias ω en función de n . De la expresión anterior, simplemente imponiendo que la raíz cuadrada sea real, obtenemos la condición $\omega \geq \mu\epsilon$. De ahí vemos que si $\epsilon \rightarrow 0$ tenemos modos de vibración de frecuencia arbitrariamente baja, por lo que podríamos tener un número arbitrariamente grande de cuantas de energía de tal frecuencia una vez cuantizada la teoría, conllevando pues posibles divergencias. Es igualmente sencillo ver que si $\epsilon \rightarrow 0$ entonces $n \rightarrow \infty$ en la ecuación (4.12). Dado que las frecuencias ω dependen de los números cuánticos n y \vec{k} , de ahora en adelante las escribiremos como $\omega_n(\vec{k})$.

Es sencillo ver que el Hamiltoniano del sistema en el espacio de Rindler

$$H_R = \int_{\mathcal{R}} \xi \, d^2x \, d\xi \, (T_M)^{00} , \quad (4.13)$$

donde $(T_M)^{00}$ es la componente correspondiente a la densidad de energía del tensor energía-momento, una vez escrito en término de las soluciones de la ecuación de movimiento, descompone en una suma directa de modos normales de vibración independientes de energía $\omega_n(\vec{k})$. La función de partición para un modo viene dada por

$$Z(\beta; n, \vec{k}) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-m\beta\omega_n(\vec{k})} = \frac{1}{(1 - e^{-\beta\omega_n(\vec{k})})} . \quad (4.14)$$

Dado que los modos son independientes, la función de partición total viene descrita por

$$Z(\beta) = \prod_{n, \vec{k}} Z(\beta; n, \vec{k}) = e^{-\beta F(\beta)} , \quad (4.15)$$

por lo que la energía libre de Helmholtz es

$$F(\beta) = -\frac{1}{\beta} \sum_{n, \vec{k}} \ln(Z(\beta; n, \vec{k})) . \quad (4.16)$$

Aproximando las sumas por integrales, la ecuación anterior se puede escribir como

$$F(\beta) = \frac{L^2}{\beta} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \int_{\mu\epsilon}^{\infty} d\omega \frac{dn}{d\omega} \ln(1 - e^{-\beta\omega}) . \quad (4.17)$$

Si diferenciamos la expresión dada en la ecuación (4.12), obtenemos la densidad de estados

$$\frac{dn}{d\omega} = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - (\mu\epsilon/\omega)^2}}{1 - \sqrt{1 - (\mu\epsilon/\omega)^2}} \right) , \quad (4.18)$$

y cambiando los órdenes de integración se obtiene que

$$F(\beta) = \frac{A}{(2\pi)^2\beta} \int_{\epsilon m}^{\infty} dw \ln(1 - e^{-\beta\omega}) \times \int_0^{\sqrt{(w/\epsilon)^2 - m^2}} dk \, k \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - (\epsilon/w)^2(k^2 + m^2)}}{1 - \sqrt{1 - (\epsilon/w)^2(k^2 + m^2)}} \right), \quad (4.19)$$

donde $L^2 = A$ es el área del horizonte. La integral en k se puede realizar, y da como resultado

$$F(\beta) = \frac{A}{(2\pi)^2\beta} \int_{\epsilon m}^{\infty} dw \ln(1 - e^{-\beta\omega}) \times \left(\left(\frac{w}{\epsilon} \right)^2 \sqrt{1 - \left(\frac{\epsilon m}{\omega} \right)^2} + \frac{m^2}{2} \ln \left(\frac{1 - \sqrt{1 - (\epsilon m/\omega)^2}}{1 + \sqrt{1 - (\epsilon m/\omega)^2}} \right) \right). \quad (4.20)$$

La expresión anterior se puede expandir en potencias de m^2 , de manera que el primer término de la expansión (masa nula) es

$$F(\beta) = \frac{A}{(2\pi\epsilon)^2\beta} \int_0^{\infty} d\omega \, \omega^2 \ln(1 - e^{-\beta\omega}), \quad (4.21)$$

cuya integral conduce a la expresión

$$F(\beta) = -\frac{\pi^2 A}{180\epsilon^2\beta^4}. \quad (4.22)$$

Llegados a este punto hacemos uso de un resultado que demostramos en el apéndice A: la matriz densidad que describe el vacío en espacio de Minkowski, una vez traceada la región dentro del horizonte de Rindler (región $x < 0$, siendo x la coordenada cartesiana usual), es exactamente una matriz densidad térmica, con Hamiltoniano de Rindler H_R , y temperatura $T = \frac{1}{2\pi}$ (este resultado tan remarcable no es más que una manifestación del efecto Unruh, ver capítulo 3). Si calculamos pues la entropía asociada a la energía libre de Helmholtz dada por la ecuación (4.22) a la temperatura $\beta = 2\pi$,

obtenemos la ley²

$$S = \frac{A}{360\pi\epsilon^2} . \quad (4.23)$$

El resultado de la ecuación anterior guarda mucha similitud con el resultado de Srednicki (ecuación (2.21)), y reproduce la ley de escalamiento de la entropía con el área del horizonte de forma clara. Vemos aquí que la aparición del área está ligada a una integración respecto a los modos transversales del campo. No obstante, queremos destacar que la aproximación al problema en este cálculo es muy diferente al cálculo de Srednicki, si bien en ambos casos lo que se acaba calculando es una entropía de entrelazamiento. En la relación dada por la ecuación (4.23) observamos que de nuevo la entropía es *divergente*, debido al corte ultravioleta ϵ . Ésta divergencia, que siempre aparece como el inverso del corte elevado al número de dimensiones transversales (número de dimensiones del horizonte), tiene su origen en que existen infinitos modos normales del campo cuando nos acercamos al horizonte de sucesos. Contrasta este resultado divergente con la entropía del agujero negro calculada a partir de meros argumentos termodinámicos, la cual es perfectamente finita (ecuación (1.4)). La forma en que desaparece esta divergencia explícita que da la teoría de campos para la entropía de entrelazamiento de un agujero negro es, hoy por hoy, un problema abierto. Susskind y Uglum [14] afirman que la presencia de la divergencia está íntimamente relacionada con la renormalización de la constante de Newton gravitatoria G , absorbiéndose los infinitos en la renormalización de ésta. Quede claro, pues, que pese a que el escalamiento predicho es el correcto, la teoría de campos predice que la entropía de un agujero negro ha de ser *infinita*, lo que sabemos que no es viable por argumentos termodinámicos. De igual modo, el coeficiente que acompaña al área en la ecuación (4.23) es relativo, dado que un cambio de definición del corte ultravioleta ϵ induce un cambio en el valor de dicho coeficiente.

²El cálculo a partir de la ecuación (4.3) se fundamenta en variaciones con respecto al parámetro β . Notar que esto es posible dado que, formalmente, el cálculo aquí presentado se ha realizado sobre una variedad formada por un tronco de cono con ángulo de déficit $2\pi - \beta$.

Capítulo 5

Kabat: propagador en el cono

En este capítulo presentamos un tercer cálculo alternativo realizado por Kabat [15] el cual se fundamenta en aspectos más geométricos que los cálculos ya mostrados, al tiempo que aporta una expresión sencilla para las correcciones de masa finita a la entropía de Von Neumann en el caso de un campo escalar libre. Veremos que el resultado es similar al de los cálculos ya presentados, si bien la metodología es muy distinta, aunque también fundamentada en el concepto de espacio de Rindler.

5.1. Cálculo explícito

Al igual que en las secciones anteriores, consideramos un campo escalar ϕ de masa m que se propaga en una métrica de Rindler (aproximación de agujero negro infinitamente masivo, ver capítulo 3). Realizamos aquí una generalización geométrica del problema: centrándonos en las coordenadas no transversales, en lugar de trabajar con una métrica de Rindler usual en espacio euclídeo, cuyo tiempo euclídeo θ es una variable angular de periodo 2π , trabajaremos en un espacio de Rindler euclídeo en el que la variable angular tenga periodo β , es decir, en un *cono* con ángulo de déficit $2\pi - \beta$ (para $\beta = 2\pi$ recuperamos la métrica en el plano). β es pues la *periodicidad* del tiempo de Rindler euclídeo en esta generalización, lo cual corresponde con el inverso de la temperatura del sistema (tal y como ya se utilizó en el capítulo 4, ver apéndice A). La temperatura correcta a la que evaluar nuestras cantidades será pues $\beta = 2\pi$, que es la temperatura de Rindler.

Partiendo de que $Z = e^{-\beta F}$ para la función de partición, siendo F la

energía libre de Helmholtz y β la temperatura en teoría de campos térmica, podemos escribir la igualdad

$$\beta F = \frac{1}{2} \ln \det(-\square + m^2) . \quad (5.1)$$

Haciendo uso de las identidades $\ln(\det A) = \text{tr}(\ln A)$ y $\ln A = - \int_{\epsilon^2 \rightarrow 0}^{\infty} \frac{ds}{s} e^{-sA}$, la ecuación (5.1) se puede describir de la siguiente manera:

$$\beta F = -\frac{1}{2} \int_{\mathcal{R}} d^d x \sqrt{g} \int_{\epsilon^2}^{\infty} \frac{ds}{s} e^{-sm^2} K(s; x, x) \quad (5.2)$$

(\mathcal{R} es el espacio en coordenadas de Rindler euclídeas), donde hemos supuesto que trabajamos en d dimensiones ($d - 2$ transversales), y hemos definido el núcleo $K(s; x, x')$ como

$$K(s; x, x') = \langle x | e^{-s(-\square)} | x' \rangle , \quad (5.3)$$

lo que no es más que un propagador en tiempo euclídeo de $|x'\rangle$ a $|x\rangle$ a través de una evolución dictada por el operador $-\square$. Para calcular este núcleo, diagonalizamos el operador $-\square$ en el cono, obteniendo como solución

$$\begin{aligned} \phi_{kl\vec{k}_{\perp}}(x) &= \frac{e^{i\vec{k}_{\perp} \cdot \vec{x}_{\perp}}}{(2\pi)^{(d-2)/2}} \left(\frac{k}{\beta}\right)^{1/2} e^{i2\pi l\theta/\beta} J_{|2\pi l/\beta|}(k\xi) \\ -\square \phi_{kl\vec{k}_{\perp}}(x) &= (k^2 + \vec{k}_{\perp}^2) \phi_{kl\vec{k}_{\perp}}(x) \quad l \in \mathbb{Z}, \quad k \in \mathbb{R}^+, \quad \vec{k}_{\perp} \in \mathbb{R}^{d-2} \\ \int_{\mathcal{R}} d^d x \sqrt{g} \phi_{kl\vec{k}_{\perp}}^*(x) \phi_{k'l'\vec{k}'_{\perp}}(x) &= \delta_{ll'} \delta(k - k') \delta^{(d-2)}(\vec{k}_{\perp} - \vec{k}'_{\perp}) , \end{aligned} \quad (5.4)$$

donde $x \equiv (\xi, \theta, \vec{x}_{\perp})$ (se han escogido las autofunciones de manera que sean regulares en el origen [15]). El núcleo $K(s; x, x')$ viene dado en términos de estas autofunciones por

$$K(s; x, x') = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dk \int d^{d-2} k_{\perp} e^{-s(k^2 + \vec{k}_{\perp}^2)} \phi_{kl\vec{k}_{\perp}}(x) \phi_{kl\vec{k}_{\perp}}^*(x') , \quad (5.5)$$

pudiéndose realizar la suma y la integral [15, 16, 17], de manera que el resultado para $x = x'$ es

$$\begin{aligned} K(s; x, x) &= \frac{1}{(4\pi s)^{d/2}} - \frac{1}{2\beta} \frac{1}{(4\pi s)^{d/2}} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-\frac{\xi^2}{s} \cosh^2(y/2)} \\ &\quad \times \left(\cot \frac{\pi}{\beta} (\pi + iy) + \cot \frac{\pi}{\beta} (\pi - iy) \right) . \end{aligned} \quad (5.6)$$

De la ecuación anterior, el primer término $\frac{1}{(4\pi s)^{d/2}}$ da lugar a una divergencia en la energía libre en el caso $\beta = \infty$ (temperatura cero). Identificamos pues este término como un remanente de la densidad de energía del vacío, que siempre podemos absorber en una renormalización de la constante cosmológica [15], por lo que podemos prescindir de él para el cálculo del comportamiento de la entropía. A partir del segundo término de la ecuación (5.6) obtenemos el valor de la energía libre

$$\beta F = -\frac{\pi^2}{3\beta} A_{\perp} \left(1 - \left(\frac{\beta}{2\pi} \right) \right) \int_{\epsilon^2}^{\infty} \frac{ds}{(4\pi s)^{d/2}} e^{-sm^2}, \quad (5.7)$$

siendo A_{\perp} el área del horizonte. De la expresión anterior podemos extraer el valor de la entropía $S = \beta^2 \frac{\partial F}{\partial \beta}$ para $\beta = 2\pi$ sin ninguna dificultad¹.

De nuevo este cálculo reproduce la ley de escalamiento de la entropía con el área del horizonte, al igual que los cálculos de los capítulos 2 y 4, pero observamos sutiles diferencias respecto a aquellos. En primer lugar, la corrección de masa finita m en este cálculo aparece manifiestamente a través de un factor exponencial en m^2 dentro de una transformada integral, luego la entropía de entrelazamiento disminuye con la masa del campo², siempre que $\frac{1}{m^2} \leq \epsilon^2$ (de lo contrario, el campo tendría una longitud de onda Compton tal que la presencia del corte ϵ^2 sería inapreciable). Notar que si $\epsilon \sim L_{\text{pl}}$, siendo L_{pl} la longitud de Planck, entonces la dependencia en la masa del campo es relevante a partir de $m \sim M_{\text{pl}}$, siendo M_{pl} la masa de Planck. En segundo lugar, el corte ϵ^2 aparece aquí como un corte “natural” de una integral divergente, y no como un corte asociado a la proximidad al horizonte, lo que muestra que la regularización del cálculo no es única. En tercer lugar, es interesante comparar la dependencia en β obtenida en la ecuación (5.7) con la obtenida anteriormente en la ecuación (4.22). Si bien en el cálculo de Susskind y Uglum esta dependencia es $\sim 1/\beta^4$, en el presente cálculo de Kabat ésta es del estilo $\sim 1/\beta^2$. Pese a que la temperatura relevante para el cálculo de la entropía es $\beta = 2\pi$, a la dependencia en β se le podría atribuir circunstancialmente cierto sentido físico en el marco de una teoría de campos térmica, luego esta diferencia en el comportamiento debería ser analizada en detalle. Se puede ver que tal disparidad en la dependencia en β de los dos cálculos va asociada a la forma en que se calcula en núcleo $K(s; x, x')$ en

¹De nuevo tomamos la base natural para los logaritmos en la definición de la entropía.

²Esta característica ha sido también observada numéricamente en cálculos relacionados con transiciones de fase cuánticas en ciertos sistemas de materia condensada [18].

el cono, y que la forma “correcta” de reproducir el resultado de Susskind y Uglum es a través de una transformación conforme en la métrica de Rindler euclídea, obteniendo la denominada “métrica óptica” (para más detalles al respecto, recomendamos ver el trabajo de Emparan [19]). El resto de características son similares a las ya mencionadas en los cálculos ya presentados en los capítulos anteriores, tales como la “relatividad” del coeficiente que acompaña al área debido a la subjetividad de la regularización. Regresaremos de nuevo a este aspecto del cálculo así como a otros en el capítulo 6, donde recogeremos nuestras conclusiones generales de todo lo presentado hasta el momento.

Capítulo 6

Discusión y conclusiones

En este trabajo hemos presentado tres cálculos diferentes basados en teoría cuántica de campos que tratan de arrojar luz sobre el oscuro origen de la entropía de un agujero negro $S = \frac{A}{4}$ (siendo A el área del horizonte de sucesos). Los análisis se han centrado en el estudio para un campo escalar de la entropía de entrelazamiento, o entropía de Von Neuman, la cual mide las correlaciones cuánticas existentes entre dos subsistemas. Del estudio aquí presentado extraemos las siguientes conclusiones:

- Todas las entropías calculadas son proporcionales al área del horizonte de sucesos.
- Todos los cálculos de la entropía de entrelazamiento realizados con teoría cuántica de campos son formalmente divergentes. Se hace necesaria, pues, la introducción de una regularización en algún punto del cálculo, la cual no es única: para Srednicki se trata del parámetro de red debido a la discretización del campo; para Susskind y Uglum se trata de un corte ultravioleta en las proximidades del horizonte de sucesos debido a la divergencia del número de estados accesibles en esa región, y para Kabat se trata una mera regularización de una integral divergente en una identidad matemática. El hecho de que aparezca siempre este corte, hace que el coeficiente obtenido para la ley de proporcionalidad con el área no sea universal, dado que una redefinición del corte involucra una redefinición de la constante de proporcionalidad. Dicho coeficiente es únicamente universal para teorías en $1 + 1$ dimensiones, donde el corte aparece en el interior de un logaritmo. La entropía para estas teorías se

puede calcular mediante consideraciones de teoría de campos conforme, y se demuestra que dicho coeficiente viene dictado por la *carga central* de la teoría [18, 20].

- La dependencia en β de la energía libre de Helmholtz para los cálculos de Susskind y Uglum y de Kabat es diferente ($1/\beta^4$ en un caso y $1/\beta^2$ en el otro), si bien la temperatura física a la que evaluar la entropía es la temperatura de Rindler $\beta = 2\pi$. Emparan [19] demuestra que, para recuperar la dependencia de Susskind $1/\beta^4$ en el cálculo de Kabat se debe introducir la denominada “métrica óptica”. No entramos en más detalles respecto a esta pequeña particularidad de uno de los cálculos, y remitimos al lector interesado a la referencia específica [19].

El hecho de que la entropía de Von Neumann sea proporcional al área del horizonte nos inspira a afirmar que las correlaciones cuánticas alrededor de esta región son de corto alcance. Esta característica ha sido igualmente descubierta dentro de un contexto radicalmente diferente, el basado en la teoría cuántica de la información, a partir del estudio del entrelazamiento en sistemas críticos de materia condensada [21]. Merece la pena destacar que algunos cálculos recientes en los campos de la información y computación cuánticas han redescubierto de nuevo la ley de proporcionalidad con el área de la entropía de entrelazamiento, si bien motivado por problemas abiertos específicos de estas disciplinas [18, 22, 23, 24, 25]. Esta conexión interdisciplinaria es vista con muy buenos ojos por el autor del presente trabajo.

Mención aparte merece un cálculo realizado dentro del contexto de la teoría de cuerdas, el cual no hemos presentado aquí. Dicho cálculo, realizado por Susskind y Uglum [14] reproduce *exactamente* la ley $S = \frac{A}{4}$ a partir de un recuento de modos específico. Si bien éste es un cálculo muy particular, es visto como un éxito de la teoría de cuerdas, pues reproduce el resultado finito que se obtiene a partir de consideraciones meramente termodinámicas - la teoría de cuerdas es una teoría finita en el ultravioleta-. Podría esto tratarse de un indicio de que, tal vez, la teoría de cuerdas vaya por el camino correcto de cara a obtener una teoría cuántica de la gravedad, la cual nos proporcione en el futuro la nueva física necesaria para resolver algunos de los problemas “frontera” de la física teórica actual, como el discutido a lo largo de este trabajo.

Bibliografía

- [1] J. Michell, Phil. Trans. R. Soc. (London), **74**, 35 (1784).
- [2] P. S. Laplace, *Exposition du Systeme du Monde* (Paris), Vol. II, p. 305 (1796).
- [3] B. Schutz, *A first course in general relativity*, Cambridge University Press (1985).
- [4] C. W. Misner, K. S. Thorne y J. A. Wheeler, *Gravitation*, San Francisco: Freeman (1973).
- [5] R. Penrose y R. M. Floyd, Nature, **229**, 177 (1971).
- [6] D. Christodoulou, Phys. Rev. Lett., **25**, 1596 (1970).
- [7] S. W. Hawking, Phys. Rev. Lett., **26**, 1344 (1971).
- [8] S. W. Hawking, Commun. Math. Phys., **43**, 199 (1975).
- [9] J. d. Bekenstein, Contemp.Phys., **45** pp.31-43 (2003); quant-ph/0311049.
- [10] S. W. Hawking, Phys. Rev. D, **14**, 2460 (1976).
- [11] M. Srednicki, Phys. Rev. Lett., **71**, 666 (1993); hep-th/9303048.
- [12] M. A. Nielsen. I. L. Chuang, *Quantum computation and quantum information*, Cambridge University Press (2000).
- [13] S. A. Fulling, S. N. M. Ruijsenaars, Phys. Rep., **152**, 3, pp.135-176 (1987).
- [14] L. Susskind, J. Uglum, Phys.Rev. D, **50** 2700-2711 (1994); hep-th/9401070.

- [15] D. Kabat, Nucl.Phys. B **453** pp.281-302 (1995); hep-th/9503016.
- [16] J. Dowker, J. Phys. A, **10**, 115 (1997); J. Dowker, Phys. Rev. D, **36**, 3742 (1987).
- [17] S. Deser y R. Jackiw, Commun. Math. Phys., **118**, 495 (1988).
- [18] J. I. Latorre, E. Rico, G. Vidal, Quant. Inf. and Comp., **4**, 1 (2004) pp.048-092 (2004).
- [19] R. Emparan, Phys.Rev. D, **51** pp.5716-5719 (1995).
- [20] P. Ginsparg, *Applied conformal field theory*, Les Houches Summer School 1988, pp. 1-168.
- [21] A. Osterloh, L. Amico, G. Falci, R. Fazio, Nature **416**, 608 (2002); quant-ph/0202029.
- [22] G. Vidal, J. I. Latorre, E. Rico, A. Kitaev, Phys.Rev.Lett., **90** 227902 (2003); quant-ph/0211074.
- [23] J. I. Latorre, R. Orús, quant-ph/0308042 (aceptado para publicación en Phys. Rev. A).
- [24] R. Orús, J. I. Latorre, quant-ph/0311017 (aceptado para publicación en Phys. Rev. A).
- [25] C. Wellard, R. Orús, quant-ph/0401144.
- [26] D. Kabat, M. J. Strassler, Phys.Lett. B, **329** pp.46-52 (1994).

Apéndice A

Estado térmico de Rindler

Presentamos aquí la demostración de Kabat y Strassler [26] de la equivalencia entre el vacío en espacio de Minkowski restringido a la zona de Rindler y un estado térmico de temperatura $\beta = 2\pi$.

Consideremos $\phi(t, x, y_1, \dots, y_{d_\perp})$ un campo en un espacio de Minkowski de $(d_\perp + 1) + 1$ dimensiones. A un tiempo minkowskiano t fijo, para un observador de Rindler en $x > 0$ existe un horizonte de sucesos en $x = 0$. Describiremos la configuración del campo $\phi(t, x, y_i)$ como $\phi_R(t, x, y_i)$ para $x > 0$ y como $\phi_L(t, x, y_i)$ para $x < 0$. Tomemos a un tiempo fijo t_0 el estado fundamental de la teoría $|\Omega\rangle$, con matriz densidad $|\Omega\rangle\langle\Omega|$. De ahí, formamos la matriz densidad ρ_R describiendo los grados de libertad del campo para $x > 0$ a partir de la traza parcial de los grados de libertad localizados en la región $x < 0$

$$\langle\phi'_R|\rho_R|\phi''_R\rangle = \int \mathcal{D}\phi_L \langle\phi_L\phi'_R|\Omega\rangle\langle\Omega|\phi_L\phi''_R\rangle. \quad (\text{A.1})$$

El funcional del vacío viene dado por la expresión

$$\langle\Omega|\phi'_L\phi'_R\rangle = \int \mathcal{D}\phi e^{-\int_0^{i\infty} d\theta \int dx d^{d_\perp}y \mathcal{L}[\phi]}, \quad (\text{A.2})$$

donde θ es el tiempo de Rindler euclídeo y $\mathcal{L}[\phi]$ es el lagrangiano de la teoría. Igualmente tenemos que

$$\langle\phi'_L\phi''_R|\Omega\rangle = \int \mathcal{D}\phi e^{+\int_0^{-i\infty} d\theta \int dx d^{d_\perp}y \mathcal{L}[\phi]}, \quad (\text{A.3})$$

por lo que para los elementos de matriz de ρ_R obtenemos, tras una simple

redefinición adecuada de las variables de integración, que

$$\langle \phi'_R | \rho_R | \phi''_R \rangle = C \int \mathcal{D}\phi \, e^{-(\int_{\epsilon}^{i\infty} d\theta + \int_{-i\infty}^{-\epsilon} d\theta) \int dx \, d^d_{\perp} y \, \mathcal{L}[\phi]} , \quad (\text{A.4})$$

donde $\phi_R(\theta = -\epsilon) = \phi'_R$, $\phi_R(\theta = +\epsilon) = \phi''_R$ (condiciones de contorno) y C es una constante de normalización. La anterior expresión se puede formular también en la forma

$$\langle \phi'_R | \rho_R | \phi''_R \rangle = C \int \mathcal{D}\phi \, e^{-S} \, \delta(\phi_R(\theta = -\epsilon) - \phi'_R) \delta(\phi_R(\theta = +\epsilon) - \phi''_R) , \quad (\text{A.5})$$

siendo S la acción correspondiente al camino. Observamos ahora que la expresión anterior es la suma sobre todas las posibles trayectorias que llevan de $\phi_R(\theta = +\epsilon) = \phi''_R$ a $\phi_R(\theta = -\epsilon) = \phi'_R$, por lo que no es más que un propagador con el generador de las traslaciones temporales en espacio euclídeo de Rindler (rotaciones). Para una rotación de ángulo β de $+\epsilon$ a $-\epsilon$ en este espacio, éste viene dado por la expresión

$$\langle \phi'_R(\theta = -\epsilon) | e^{-\beta H_R} | \phi''_R(\theta = +\epsilon) \rangle , \quad (\text{A.6})$$

siendo H_R el Hamiltoniano de Rindler. Si en la expresión anterior tomamos el límite físico $\epsilon \rightarrow 0$, queda claro que la rotación es de ángulo 2π , por lo que tenemos la equivalencia

$$\rho_R = e^{-2\pi H_R} , \quad (\text{A.7})$$

lo que demuestra que la matriz densidad reducida a la zona de Rindler es una matriz densidad térmica de temperatura $\beta = 2\pi$ (temperatura de Rindler). Es interesante observar que, de la ecuación (A.6), se deduce que de trabajar en un espacio generalizado de periodo β (la geometría de un *cono*), la equivalencia sigue siendo cierta, estando siempre la temperatura asociada el inverso de la periodicidad de la variable angular en la variedad.