



FACULTAD DE CIENCIAS  
UNIVERSIDAD DE GRANADA

MÁSTER EN FÍSICA Y MATEMÁTICAS  
ASIGNATURA: INFORMACIÓN, COMPUTACIÓN Y  
TECNOLOGÍAS CUÁNTICAS

## **Agujeros negros y teoría de la información**

Autor:  
José Adrián Castelo Martínez

---

Profesor:  
Jesús Sánchez Dehesa

Diciembre de 2017



# Índice

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Termodinámica de Agujeros Negros</b>	<b>5</b>
1.1. Área como entropía . . . . .	5
1.2. Radiación de Hawking . . . . .	8
1.3. Surgen las paradojas . . . . .	10
<b>2. Cálculos explícitos</b>	<b>12</b>
2.1. Entropía de von Neumann . . . . .	12
2.2. Cálculo de Srednicki . . . . .	15
2.3. Cálculo de Susskind y Uglum . . . . .	19
2.3.1. Frefo <i>vs</i> Fido . . . . .	21
<b>3. Paradoja de la información</b>	<b>23</b>
3.1. Conservación de la información . . . . .	23
3.2. Principio de equivalencia . . . . .	29
3.3. Teorema de No-clonación . . . . .	29
<b>4. Complementariedad</b>	<b>31</b>
4.1. Pérdida de información . . . . .	31
4.2. Complementariedad de los agujeros negros . . . . .	33
<b>5. Conclusiones</b>	<b>36</b>
<b>A. Relatividad general y agujeros negros</b>	<b>37</b>
A.1. Agujero negro de Schwarzschild . . . . .	38
A.2. Agujero negro de Kerr . . . . .	40
A.3. Diagramas de Penrose . . . . .	42
<b>Referencias</b>	<b>45</b>



## Introducción

Hace cien años, Albert Einstein formuló las leyes de la relatividad general. Su belleza es tal vez solo equiparable a la simplicidad del principio que dio pie a ella: la equivalencia local entre la gravedad y la aceleración. De tan simple principio se pueden deducir en última instancia muy diversos fenómenos: el corrimiento al rojo de la luz y con él la dilatación temporal; la precesión del perihelio de los planetas; la curvatura de la luz en un campo gravitatorio...

También nos ha permitido estudiar objetos complicados, como las enanas blancas o las estrellas de neutrones, y nos permite estudiar el pasado y futuro del universo. Ni siquiera un año tras la publicación de las ecuaciones de campo por Einstein, el físico alemán Karl Schwarzschild encontró la solución de las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío bajo los supuestos de simetría esférica y estaticidad. Tal solución, conocida como la métrica de Schwarzschild, describe el campo gravitacional de un objeto esféricamente simétrico y estático, como el exterior de una estrella con momento angular y carga nulas. Pero también lleva a una solución que en un principio no fue tomada en serio: los agujeros negros. Como característica más distintiva, la gravedad es tan fuerte en ellos que poseen un horizonte de sucesos; una superficie que los envuelve a partir de la cual ni la luz puede escapar.

Conforme el tiempo transcurrió, la evidencia a favor de su existencia se hizo mayor y hoy ya nadie duda de ella, e incluso su existencia proporciona explicación a fenómenos que de otra forma serían inexplicables, como los cuásar o algunas imágenes de lentes gravitacionales. Conforme la duda fue disminuyendo, y los físicos se volcaron en su estudio, sus asombrosas características no tardaron en salir a la luz.

A finales de los años sesenta y principios de los setenta, físicos como Roger Penrose, Brandon Carter, Stephen Hawking... encontraron que el área de los agujeros negros crecía en cualquier proceso que les ocurriera. De hecho, encontraron cuatro leyes cuya formulación matemática era completamente análoga a la de las leyes de la termodinámica. Nadie tomó tal analogía en serio. Pero poco tiempo después, el físico israelí Jacob Bekenstein razonó que la segunda ley de la termodinámica; que enuncia que la entropía en el universo siempre ha de crecer, podría ser violada arrojando objetos en el interior de los agujeros negros dado que está desconectado causalmente del exterior. Por tanto, para salvaguardar tal ley, los observadores externos debían de ser capaces de asignar una entropía a los agujeros negros. Las recién descubiertas leyes de los agujeros negros sugerían que el área podría estar relacionada con la entropía, y Bekenstein fue el primero que tomó tal sugerencia en serio.

Nadie más lo hizo. Esto se debe a dos razones principalmente: la primera es que los agujeros negros “no tienen pelo”; que viene a significar que se necesitan muy pocos parámetros (tres a lo sumo) para especificar inequívocamente su estado. En termodinámica, la entropía mide el número de microestados compatibles con un estado macroscópico dado, y aquí parecía haber solo uno. La segunda razón es que los sistemas con entropía tienen una temperatura no nula, y los cuerpos dotados de temperatura radian, pero como hemos dicho nada puede escapar de un agujero negro.

Hawking, tras una sugerencia del físico ruso Yakov Zel'dovich, se propuso calcular desde la mecánica cuántica si la existencia de tal radiación era posible. Para su sorpresa, sí lo era: no solo debían radiar, sino que además el espectro de su radiación era *exactamente* el de cuerpo negro. La fórmula de la temperatura de los agujeros negros encontrada por Hawking es el primer resultado en física en el que se aunan los a priori dispares campos de la gravedad y la teoría cuántica de campos.

Aquí fue cuando surgieron los problemas de verdad. Al poco tiempo de la sugerencia de Bekenstein, la asignación de entropía a los agujeros negros empezó a calar. A ello contribuyó la interpretación de ésta como el logaritmo del número de formas en que el agujero negro se pudo haber formado. Pensemos que un agujero negro se puede formar por el colapso de una estrella lo suficientemente masiva, por el colapso de dos estrellas de neutrones, de dos agujeros negros... Pero si al final acabamos con un agujero negro con cierta masa, carga y momento angular dados, nada nos dice a partir de que estado inicial se pudo haber formado. La entropía cuantificaría entonces cuántos de ellos son posibles.

Pero si los agujeros negros radian ya no solo es que debemos asignarles entropía, y con ello información, sino que al final de su evaporación nos quedaremos con radiación incoherente que no aporta ninguna información acerca de la materia que cayó en él o la que lo formó. Tal información *desaparecería* de nuestro universo. Las leyes de la física conservan la información en la evolución de los sistemas: en mecánica clásica el volumen ocupado por los microestados en el espacio de fases es constante, y en mecánica cuántica la evolución en mecánica cuántica es llevada a cabo por un operador unitario. Ambas afirmaciones implican que en la evolución ni se pierde ni se gana información, y por tanto la entropía es constante. El crecimiento que observamos nosotros de la entropía es consecuencia de que la resolución a la hora de contar microestados no es infinita (por ejemplo, tenemos un límite natural dado por el principio de incertidumbre). Esa es la entropía que la segunda ley de la termodinámica asevera que crece en el universo.

El mismo Hawking, así como la gran mayoría de los relativistas más puros, se decantaron inicialmente por la opinión de que la coherencia cuántica se perdía durante la evaporación de los agujeros negros, y por tanto la mecánica cuántica usual no aplicaba en la evolución de estos. Más aun, una vez que se permitía la pérdida de coherencia cuántica en la evaporación de los agujeros negros nada impide que tal pérdida se dé en cualquier proceso en la escala de Planck. Leonard Susskind, Michael Peskin y Gerard t'Hooft entre otros argumentaron que de ser así el mundo se comportaría como estuviera en un medio ruidoso que continuamente llevara a la pérdida de coherencia. Pero no existe manera conocida de destruir la coherencia sin a la vez violar la conservación de la energía calentando el entorno inmediato. Por tanto, éstos y algunos otros físicos se decantaron porque la solución pasaba por conseguir hacer coexistir las leyes de la mecánica estadística y mecánica cuántica con las de la evaporación del agujero negro.

De hecho, el problema se ha revelado tan profundo que físicos como t'Hooft confían en que su resolución abrirá el camino hacia un nuevo paradigma en el camino

de la unificación de la mecánica cuántica con la relatividad general.

El problema continua hoy en día abierto en física. En este trabajo desarrollaremos la problemática mediante un acercamiento a la termodinámica de los agujeros negros (sección 1). En ella veremos explícitamente la analogía de las leyes de los agujeros negros con la primera ley de la termodinámica (apartado 1.1), y llevando más allá esta analogía veremos que la entropía de los agujeros negros debe escalar según su área. Además, esta analogía nos proporcionará también la temperatura de los agujeros negros, aunque también la veremos desde la perspectiva dada por Hawking y como generalización del efecto Unruh (apartado 1.2). Ello nos llevará directo a las paradojas arriba mencionadas (apartado 1.3). Además, se incluye en el apéndice A un breve resumen de conceptos relacionados con el trabajo, como la métrica de Schwarzschild; distintos sistemas de coordenadas útiles; la métrica de Kerr y su analogía con la primera ley de la termodinámica y una breve introducción a los diagramas de Penrose.

En 2 veremos dos cálculos que intentan dar una idea del origen de la entropía de los agujeros negros, hoy por hoy desconocido. Para ello necesitaremos introducir y desarrollar el concepto de entropía de entrelazamiento (apartado 2.1). Posteriormente lo aplicaremos para calcular la entropía de entrelazamiento al trazar un campo cuántico escalar sin masa sobre el interior de una esfera imaginaria de radio  $R$  (apartado 2.2), cálculo debido a M. Srednicki. Esto nos llevará a una entropía de entrelazamiento proporcional al área de contacto entre los dos subsistemas sobre los que traceamos, y sugiere que parte de la entropía del agujero negro podría ser debido a ello, sino toda. También comentaremos el cálculo realizado por Susskind y Uglum (apartado 2.3) y por qué éste les lleva a proponer sustituir el horizonte de sucesos matemáticos por un “horizonte estirado” situado entorno a una distancia de Planck del matemático.

En la sección 3 estudiaremos los tres principios de la física cuya compatibilidad es puesta a prueba con esta paradoja: la conservación de la información, el principio de equivalencia y la no-clonación de estados cuánticos. Estudiaremos en profundidad la evolución que sufriría un sistema bipartito partiendo de un estado puro, en analogía a la evolución sufrida por el agujero negro y veremos que la información comienza a salir de manera significativa a partir de que su área decrece a la mitad de su valor inicial.

Finalmente estudiaremos la solución propuesta por L. Susskind, L. Thorlacius y J. Uglum para salvaguardar los tres principios anteriores: la complementariedad de los agujeros negros. En palabras llanas, viene a decir que ningún observador será capaz de observar que ninguno de ellos se viola en presencia de un agujero negro. Para ello estudiaremos un experimento mental propuesto por éstos autores, y dejaremos al lector interesado buscar los muchos más que se han debatido desde entonces.

Al igual que los experimentos mentales que llevaron a la relatividad especial y general, así como los desarrollados a la luz de la mecánica cuántica, en gran parte de este trabajo nos encontraremos desarrollando ideas bajo el amparo de un experi-

mento mental que conduciremos mediante las leyes físicas conocidas, otorgándoles el carácter de exactas. Entre éstas, destaquemos que este trabajo se basa en la asunción de que la formación y evaporación de los agujeros negros es consistente con los principios básicos de la mecánica cuántica (evolución unitaria), o la usual conexión entre termodinámica y mecánica estadística cuántica, en la que se establece que la termodinámica resulta del *coarse graining* (“granulado grueso”, refiriéndonos al promedio sobre el espacio de fases) con resolución dada una descripción microscópica del sistema en la cual muchos microestados compatibles se llevan a un mismo macroestado. En concreto, tal número es del orden de la exponencial de la entropía.

El tema tratado en este trabajo es ambicioso y a la vez muy instructivo: nos lleva a ahondar en resultados conocidos de relatividad general, y en algunos otros comúnmente asumidos pero tal vez no digeridos, como la interpretación profunda de la entropía de un sistema. Dado que el trabajo se sitúa en la frontera del conocimiento sobre el tema (aunque se ha tratado de primar la claridad sobre la rigurosidad), no espere el lector acabar conociendo la resolución a tan sorprendente paradoja. Más bien, el propósito de este trabajo es situarse en el contexto que dio lugar a ella y conocer los resultados que han habido desde entonces en aras de proporcionarle explicación.



# 1. Termodinámica de Agujeros Negros

Decía S. Chandrasekhar que “...black holes of nature are the most perfect macroscopic objects there are in the Universe: the only elements in their construction are our concepts of space and time”. A *grosso modo*, un agujero negro es una solución de las ecuaciones de campo de Einstein del vacío, cuya mayor distinción es que posee una superficie que lo rodea y desconecta causalmente interior de exterior. Tal superficie se conoce como horizonte de sucesos. En palabras llanas, nada; ni la luz, puede salir de un agujero negro. Para una discusión más detallada de las peculiaridades que aquí se comenten véase el apéndice A.

## 1.1. Área como entropía

Los agujeros negros se caracterizan por estar completamente determinados por tres parámetros: su masa  $m$ , su carga  $Q$  y su momento angular  $J$ . El caso más sencillo de todos es la solución de Schwarzschild, caracterizada por ser esféricamente simétrica y estática. Por tanto, su horizonte de sucesos es de la forma  $r = \text{constante}$ , siendo  $r \equiv R_S = 2Gm/c^2$ , con  $G$  la constante gravitatoria de Newton,  $m$  la masa del agujero negro y  $c$  la velocidad de la luz.

Dado que en general podremos describir macroscópicamente al agujero negro por sólo 3 parámetros, una descripción termodinámica cobra sentido. Para un agujero negro con momento angular no nulo, se encuentra que el área de su horizonte de sucesos satisface [1]:

$$A = 4\pi \left[ \left( M + \sqrt{M^2 - a^2} \right)^2 + a^2 \right] \quad (1.1)$$

con  $M \equiv Gm/c^2$  y  $a \equiv J/mc$ . De aquí vemos que ha de ocurrir que  $a^2 \leq M^2$ . Esto es consecuencia de la conjetura del censor cósmico de Penrose, que dice que toda singularidad debe estar oculta tras un horizonte de sucesos.

Si diferenciamos (1.1) respecto a la masa y el momento angular y reordenamos, obtenemos:

$$d(mc^2) = \Theta dA + \Omega dJ \quad (1.2)$$

donde

$$\Theta \equiv \frac{c^4(R_S - M)}{2GA}$$

$$\Omega \equiv \frac{J}{M(R_S^2 + a^2)}$$

Lo que nos llama la atención de la ecuación (1.2) es su asombroso parecido con la primera ley de la termodinámica:  $dE = TdS + pdV$ . La pregunta es: ¿será solo una analogía o tendrá implicaciones profundas?

Si guiendo con la analogía, podríamos especular y hablar sobre la entropía de un agujero negro. La ecuación (1.2) sugiere que hagamos la siguiente identificación:

$$S_H = \gamma A_H,$$

donde  $\gamma$  es una constante con las dimensiones adecuadas. Para una demostración de por qué proporcional al área y no a cualquier otra potencia de ésta, se recomienda al lector de nuevo la referencia [1].

Bekenstein, siguiendo la idea de Wheeler de que la longitud de Planck<sup>1</sup> podría jugar un papel importante en el problema que nos ocupa, se vio inspirado a proponer una relación del tipo [2]

$$S_H = \eta k_B \frac{A_H}{l_P^2}$$

donde  $\eta$  es una constante adimensional y  $l_P^2$  se conoce como área de Planck-Wheeler, introducida de manera que las unidades sean las adecuadas.

Necesitamos hacer una pequeña digresión antes de seguir. El lector atento puede estar asombrado viendo que asignamos entropía a los agujeros negros. El asombro será mayor si se ha dado cuenta de que en la descripción de los agujeros negros *sólo* es necesario conocer tres parámetros en general: la masa, el momento angular y la carga. En este sentido los agujeros negros son los objetos macroscópicos más perfectos del universo, pues concretando tres parámetros definimos unívocamente sus características. Eso quiere decir que el estado macroscópico queda determinado por un *único* microestado, luego su entropía parece que debiera ser nula. El resultado de que los agujeros negros queden descritos por tres parámetros fue sintetizado por J.A. Wheeler como el teorema del “no pelo”: si suponemos que el electromagnetismo es la única interacción de largo alcance en nuestra teoría se tiene que [3]:

Soluciones de agujeros negros estacionarias y asintóticamente planas de la relatividad general acoplada a electromagnetismo, las cuales son no singulares fuera del horizonte de sucesos, están totalmente caracterizadas por los parámetros de masa, carga eléctrica y momento angular.

¿Por qué es necesario entonces asignarles entropía a los agujeros negros? Si no poseyeran, al caer un objeto a su interior; el único cambio en el agujero negro sería un aumento de masa pero sin cambio de entropía, conllevando una pérdida de entropía en

---

<sup>1</sup>La longitud de Planck surge de tratar encontrar una magnitud con dimensiones de longitud calculada a partir de juntar las constantes de tres teorías a priori separadas: gravitación  $G$ , relatividad  $c$  y mecánica cuántica  $\hbar$ . Si no se quieren introducir factores numéricos, lo más simple es  $l_P = \sqrt{G\hbar/c^3}$ . Así mismo, se pueden definir otras magnitudes “fundamentales” mediante este procedimiento: el tiempo de Planck  $t_P = l_P/c$  que corresponde al tiempo que le lleva a la luz recorrer una distancia de Planck, la energía de Planck  $\varepsilon_P = \hbar/t_P$  que es la energía de un haz con periodo el inverso del tiempo de Planck y en consecuencia la masa de Planck  $m_P = \varepsilon_P/c^2$ , además de muchas más. Al obviar factores numéricos, es difícil asignar un significado a estas magnitudes, si es que lo poseen. Más adelante veremos que redefinir la distancia de Planck para que posea un significado preciso podría ser provechoso.

el universo. Si queremos salvaguardar la segunda ley de la termodinámica, debemos asignarle una entropía a los agujeros negros. Dado que si algo cae a un agujero negro, aumenta su masa, la entropía debe ser proporcional a su masa (a su radio por tanto). La entropía de un agujero negro mide así la cantidad de información “perdida” en el exterior al crearse y evolucionar, pues es información inaccesible para un observador externo. De hecho, es normal que sea tan alta: por el teorema de “no-pelo”, un estado macroscópico de un agujero negro queda determinado en el peor de los casos por tres parámetros. Esto parece una pérdida de información, puesto que el agujero negro puede haberse formado a partir de una estrella que colapsa, o de la fusión de dos agujeros negros... Precisamente por ello su entropía debe ser muy alta, pues existen muchas configuraciones iniciales que llevan al mismo estado final, y hemos perdido la información que nos diría cuál es la que tuvo lugar. La exponencial de la entropía del agujero negro mide por tanto el número de configuraciones que pueden dar lugar a él.

Por otro lado, en 1971, Stephen Hawking encontró que bajo ciertas consideraciones; entre ellas que el tensor de energía momento de la materia que cae al agujero negro se comporte de manera “clásica”, el área del horizonte de eventos de un agujero negro asintóticamente plano es creciente [4]. Esto nos induce a pensar que la relación área-entropía no es tan descabellada como a priori podría parecer. De hecho, otra conexión muy interesante es la siguiente: para un agujero negro de Kerr; i.e. uno en rotación sin carga neta, se define la masa irreducible como  $M_{\text{irr}}^2 = \frac{M^2}{2} \left(1 + \sqrt{1 - a^2/M^2}\right)$ , con lo que  $A_H = 16\pi M_{\text{irr}}^2$ . Resulta que se puede extraer energía de un agujero negro rotante mediante el proceso de Penrose (ver por ejemplo [3]), lo que resta masa al agujero negro. El hecho sorprendente es que  $M_{\text{irr}}$  representa la cantidad de masa del agujero negro a partir de la cual ya no se puede extraer más energía (para Schwarzschild coincide con su masa). Luego es *energía degradada*, no utilizable para producir trabajo. Precisamente el concepto clásico de entropía. Y como vemos, escala con el área, luego si ésta crece aumenta la energía degradada (entropía) del agujero negro.

Veámosla desde otra perspectiva: supongamos que queremos ver cuanto aumenta la masa de un agujero negro de Schwarzschild si se deja caer en él un bit de información (para un análisis más riguroso de este tipo de experimento mental consultar el artículo original de Bekenstein, referencia [2]). Por ejemplo, podemos lanzar un solo fotón. Para no dar más que la información “el fotón ha llegado al agujero negro”, éste debe estar lo suficientemente deslocalizado para que no podamos decir *por dónde* ha entrado (pues eso supondría dar más de un bit de información<sup>2</sup>).

Por lo anterior, debemos lanzar un fotón con  $\lambda \sim R_S$ , con  $R_S = 2Gm/c^2$  el radio de Schwarzschild. El aumento del área del agujero negro debido a la energía aportada por este fotón será:

$$dA_H = \frac{32\pi^2 G\hbar}{c^3} \equiv 32\pi^2 l_P^2 \quad (1.3)$$

---

<sup>2</sup>Un bit corresponde a la información ganada tras una pregunta con respuesta SI/NO, en este caso, la pregunta es si el fotón ha caído al agujero negro o no.

Es decir, un bit de información<sup>3</sup> aumenta aproximadamente el área de un agujero negro en una unidad de Planck-Wheeler: podemos imaginarnos así el horizonte de sucesos teselado en pequeños cuadrados de área  $l_P^2$ , cada uno conteniendo un bit de información.

## 1.2. Radiación de Hawking

Bekenstein encontró en un primer intento que la entropía debía estar relacionada con el área como en (1.6) con  $\eta = \log(\sqrt{2})/\pi$ . Como veremos, esto no es cierto. Para ello, sigamos adelante con nuestra analogía con la termodinámica y calculemos la temperatura asociada al agujero negro. Sustituyendo (1.6) en (1.2) e identificando el coeficiente que multiplique al diferencial de entropía como la temperatura se tiene que

$$T = \frac{c\hbar}{2\eta A} \sqrt{M^2 - a^2}$$

que para un agujero negro de Schwarzschild es

$$T = \frac{\hbar c^3}{32\pi\eta k_B Gm} \tag{1.4}$$

Esta es la primera ecuación de la historia de la física que une tantas ramas de la física: la mecánica cuántica ( $\hbar$ ), la relatividad ( $c$ ), la gravedad ( $G$ ) y la termodinámica ( $k_B$ ).

Hasta ahora no hemos hecho más que llevar hasta sus últimas consecuencias la analogía entre las leyes de los agujeros negros y las leyes de la termodinámica. Esto no es suficiente para demostrar fehacientemente que los agujeros negros tienen una temperatura no nula. Así pensaba Stephen Hawking cuando leyó los resultados de Bekenstein. En una visita a Moscú en 1973, el físico ruso Yákov Zeldóvich les comentó a Kip Thorne y Hawking que, mediante argumentos puramente heurísticos, los agujeros negros en rotación debían radiar. Hawking pensó que al abordar el problema desde la teoría cuántica de campos en un espaciotiempo curvo podría formalizar tal idea y conectar con la interpretación de Bekenstein. En 1974 encontró que los agujeros negros *deben* radiar si se añade un campo cuántico a la escena. Esto se puede entender de la siguiente manera: al ser permisivos y dejar que los efectos cuánticos hagan su aparición, el principio de incertidumbre permite que se creen pares de partículas virtuales con energía  $\Delta E$  durante un tiempo del orden  $\sim \hbar/\Delta t$ , para más tarde destruirse. Pero en presencia de un agujero negro, si tal par se crea cerca del horizonte puede ocurrir que una partícula caiga dentro del agujero negro y la otra escape, convirtiéndose en partícula real con lo que puede ser medida. Hawking fue capaz de demostrar que la radiación así emitida tendría un espectro de cuerpo negro. Concretamente encontró (ver [5] para la derivación original, o [3] para una

---

<sup>3</sup>Dejamos caer más de un bit con el fotón realmente por las propiedades intrínsecas de éste, pero aun así el crecimiento del área no se aleja mucho del valor esperado.

menos técnica) que se debía asignar una temperatura al agujero negro dada por

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi k_B G m} \quad (1.5)$$

que por comparación con (1.4) fija  $\eta = 1/4$  y nos da la famosa relación

$$S = k_B \frac{A}{4l_P^2} \quad (1.6)$$

En palabras (y fijando  $k_B = 1$ ): la entropía de un agujero negro es el número de bits correspondiente a medir su área en unidades de Planck entre cuatro. Es decir, por cada cuatro áreas de Planck-Wheeler tendríamos un bit de información<sup>4</sup>.

De hecho, debemos concretar la visión simplificada dada anteriormente a la luz de la ecuación (1.5). Tal temperatura corresponde a una longitud de onda de la radiación emitida del orden del radio de Schwarzschild del propio agujero negro. Tenemos dos puntos de vista por tanto:

- Por un lado, pensemos que la región ocupada por la fluctuación del vacío depende de la energía “prestada” que se tome. Cuanta menos; mayor región ocuparán. Estas fluctuaciones menos energéticas corresponderán a pares de partículas virtuales con longitudes de onda muy largas. Ahora entra en juego la gravedad de marea: si tomamos el conjunto como par, existe una gravedad diferencial entre ellas que atrae más fuertemente al agujero negro a la que está más cerca, y de manera efectiva empuja hacia arriba a la que está más lejos. Por tanto, es la energía del propio agujero negro la que se cede a las partículas virtuales convirtiéndolas en reales, haciendo que una escape y se observe como una partícula con longitud de onda  $\lambda \sim hc/k_B T = 8\pi^2 R_S$ , mientras que otra cae al interior del agujero negro, y esa cesión de energía es la que causa que el agujero negro pierda masa.
- Por otro lado, para un observador externo al agujero negro y estático (o lo que es lo mismo, acelerando para evitar caer) el horizonte de sucesos se asimila a una membrana de partículas energéticas<sup>5</sup>. Esto se debe al *efecto Unruh*. William Unruh (e independientemente Paul Davies) descubrieron que un observador acelerado en un espacio tiempo plano vería a su paso un baño térmico de partículas con una temperatura (vease [6])

$$T = \hbar a / 2\pi c k_B \quad (1.7)$$

---

<sup>4</sup>Aquí podría resultar natural redefinir la longitud de Planck como el radio de Schwarzschild de un agujero negro cuya masa es la masa de Planck, aunque no sabemos qué ocurre a tales escalas. En tal caso encontraríamos que la nueva longitud de Planck es dos veces la antigua, haciendo que ahora el factor 1/4 en (1.6) desaparezca.

<sup>5</sup> De hecho, se demuestra que se le pueden atribuir más propiedades para un observador externo que no esté en caída libre tales como conductividad eléctrica, etc. Esto se conoce como el *paradigma de la membrana*, que se revela muy útil para entender ciertos aspectos de agujeros negros. Para más información, véase la obra *Black holes: the membrane paradigm* (Yale University Press, 1986) de K.S. Thorne, R.H. Price y D.A. MacDonald.

La gravedad superficial (apéndice A.2)  $\kappa$  es la aceleración necesaria para no caer al agujero negro cuando se esta sobre el horizonte de sucesos (ver [3]). Para Schwarzschild,  $\kappa = c^4/4Gm$  y obtenemos por tanto (1.5) a partir de (1.7). Por tanto, un observador estático cerca del horizonte de sucesos verá un mar de partículas altamente energéticas. Algunas de ellas estadísticamente pueden escapar del tirón gravitacional por poseer más energía y se alejarán del agujero negro. ¿Cómo es que un observador lejano las medirá con una longitud de onda del orden del radio de Schwarzschild? Esto se debe al *redshift* provocado por el agujero negro, que hará que su frecuencia disminuya aumentando su longitud de onda.

Como vemos, el concepto de partícula real o virtual es relativo, y no absoluto: depende del sistema de referencia.

### 1.3. Surgen las paradojas

En resumen, los agujeros negros radían energía correspondiente a un cuerpo negro a la temperatura dada por (1.5), y por tanto van perdiendo masa y finalmente han de evaporarse dejándonos solo con un baño de fotones. Como curiosidad, usando la ley de Stefan-Boltzmann

$$\frac{dE}{dt} = -c^2 \frac{dM}{dt} \equiv \sigma_B AT^4$$

con  $\sigma_B$  la constante de Stefan-Boltzmann se obtiene que se evaporará en un tiempo  $t_{\text{evap}}$  dado por:

$$t_{\text{evap}} = \frac{m^3}{3B}, \quad B = \frac{\hbar c^4}{15360\pi G^2}$$

Por ejemplo, un agujero negro que tardase un tiempo del orden de la edad actual del universo en evaporarse tendría un masa de entorno  $10^{11}$  kg, que es ínfima comparada con la de nuestro Sol.

Pero ¿no dijimos que el área de un agujero negro nunca puede decrecer? ¿No está Hawking tirando por tierra su propio resultado? De hecho, no. Por ello hicimos énfasis en la palabra “clásica” al enunciar el teorema de las áreas: cuando tenemos las leyes de la mecánica cuántica en consideración, dejamos de tener tal resultado. Pero la segunda ley de la termodinámica se debe respetar: la suma del cambio en la entropía del agujero más la entropía ordinaria del exterior del agujero negro nunca decrece; teorema conocido como *segunda ley generalizada* (GSL por sus siglas en inglés), enunciado por Bekenstein por primera vez<sup>6</sup> ([1] y [2] para enunciado y aplicaciones).

---

<sup>6</sup>Una reflexión interesante es la siguiente: ¿a qué nos referimos con entropía ordinaria con el GSL? El cálculo de la entropía asociada a un sistema depende de manera fundamental de la resolución que usemos, como veremos en el apartado 3.1. Si es lo suficientemente grueso, estamos en el caso de la entropía usual de los primeros cursos de termodinámica y química. Si la resolución (o “granulado”) es lo suficientemente fino, grados de libertad atómicos y subatómicos serán incluidos. Dado que la gravedad acopla (tiene como fuente) a *todo* tipo de energía, se deben tener en cuenta todos los grados de libertad de la materia y radiación del universo, no importa cuán recónditos sean.

A la luz de estos resultados los problemas no tardan en surgir: a regañadientes podríamos aceptar que los agujeros negros tengan entropía; y por las razones alegadas, incluso podríamos aceptar que sea muy alta (la mayor parte de la entropía del universo está de hecho en los agujeros negros) ya que su “aspecto” no nos dice nada acerca de la materia que lo formó/cayó en él. Pero el hecho de que radien añade una dificultad nueva al asunto: dado que la radiación emitida sigue un espectro planckiano (carente de correlaciones), tenemos que si inicialmente cae materia en un estado puro a un agujero negro (o éste se forma a partir de materia en un estado puro, como por ejemplo una estrella de helio superfluido que colapsa a un agujero negro), el agujero negro con el tiempo se evaporará emitiendo radiación correspondiente a un estado mixto. Por tanto no se respeta la evolución unitaria, que impediría pasar de un estado puro a uno mezcla. Esta paradoja fue inicialmente sacada a la luz por Hawking [7]

¿Qué argumentos se aportaron inicialmente como posible solución? Enumeremos unos pocos:

- El primero y más evidente es que la radiación emitida debe poseer correlaciones sutiles que hagan que tras la evaporación el baño de fotones corresponda a un estado puro. Como veremos en la sección 3, es el que defenderemos.
- Cuando la masa del agujero negro se reduzca a la de Planck, tal vez por efectos descritos por una teoría cuántica de la gravitación, la evaporación cesaría (pues su longitud de onda Compton haría que no se tuviera un horizonte de sucesos bien definido, violando la conjetura del censor cósmico), quedando un remanente del agujero negro que guardase toda la información almacenada durante la vida del agujero negro. Tal destino entraría en conflicto con ideas que se aportaron más adelante (principio holográfico). Además, una partícula con tamaño infinitesimal albergando una entropía descomunal sería un desastre termodinámico, pues en palabras de Susskind<sup>7</sup> “*succionarían todo el calor de cualquier sistema con el que entraran en contacto*”.
- Podría ocurrir que la gravedad cuántica fuera una teoría en la que la evolución no sea unitaria, con lo que tendríamos que modificar las leyes conocidas de la mecánica cuántica.

---

<sup>7</sup>Cita extraída de su libro *La guerra de los agujeros negros* en el que plantea el problema de la pérdida de información en la evaporación de los agujeros negros desde un enfoque divulgativo.

## 2. Cálculos explícitos

Muchas son las propuestas que tratan de encontrar la entropía de un agujero negro partiendo de algún supuesto. En nuestro caso, veremos con cierto detalle un cálculo debido a M. Srednicki, y esbozaremos uno debido a Susskind y Uglum. En el cálculo de Srednicki se considera el espacio dividido por una esfera imaginaria de radio  $R$  y en él, un campo cuántico escalar sin masa. Bajo tal supuesto, se calcula la entropía de von Neumann de la matriz densidad reducida y veremos que escala con el cuadrado del radio de la región, *i.e.* con el área. Antes, estudiemos brevemente los conceptos necesarios para ello.

### 2.1. Entropía de von Neumann

Consideremos un sistema compuesto de dos subsistemas,  $A$  y  $B$ . Cada uno de estos subsistemas tendrá asociado un Conjunto Completo de Observables que Conmutan (CCOC), es decir un conjunto de operadores simultáneamente diagonalizables tal que una medición conjunta de todos determina unívocamente un estado puro.

Concretemos términos: tenemos un sistema descrito por un espacio de Hilbert producto tensorial de dos subespacios  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ . Si medimos todos los operadores de un CCOC de  $\mathcal{H}$ , obtenemos un estado puro para describir el sistema  $\Psi(a, b)$ ; donde el índice  $a$  describe los resultados de haber medido el CCOC de  $\mathcal{H}_A$  (luego agrupa una ristra de valores de longitud  $\dim \mathcal{H}_A$ ) y análogamente para  $b$ . A partir del tal estado escribimos el operador densidad del sistema como

$$(\rho)_{ab} = \Psi^\dagger(a, b)\Psi(a, b) \quad (2.1)$$

donde el superíndice con la daga se simplifica para escalares a tomar el conjugado complejo.

En notación de Dirac, la base que diagonaliza el CCOC de  $\mathcal{H}_A$  se denota  $\{|a\rangle\}$ , y para  $\mathcal{H}_B$  es  $\{|b\rangle\}$ , luego  $\mathcal{H}_A = \text{Span}\{|a\rangle\}$ ,  $\mathcal{H}_B = \text{Span}\{|b\rangle\}$  y  $\mathcal{H} = \text{Span}\{|a\rangle \otimes |b\rangle\} \equiv \text{Span}\{|a, b\rangle\}$ . Así, si  $|\Psi_{AB}\rangle$  es el estado (puro) del sistema,  $\Psi(a, b) \equiv \langle a, b | \Psi_{AB} \rangle$  y el operador densidad es  $\rho = |\Psi_{AB}\rangle \langle \Psi_{AB}|$ .

Para un mayor detalle acerca del uso e importancia de la matriz densidad referimos al lector a cualquier texto avanzado de mecánica cuántica, *v.g.* *Quantum mechanics: a modern development* de L. Ballentine. Para nuestros propósitos, solo destacaremos además que la mecánica cuántica se puede reformular para operar con sistemas de los cuales no tenemos un conocimiento completo (no se han medido todos los operadores de un CCOC) y por tanto tenemos una mezcla estadística de estados  $|\psi_j\rangle$  con pesos  $\rho_j$ , donde  $\sum_j \rho_j = 1$  (son probabilidades). Escribimos en tal caso la matriz densidad como  $\rho = \sum_j \rho_j |\psi_j\rangle \langle \psi_j|$ .

Los estados que intervienen en su definición corresponden a estados accesibles al sistema con frecuencias de aparición  $\rho_j$ , y en general no serán ortogonales. El valor medio de una variable dinámica  $\mathcal{A}$  con operador autoadjunto  $A$  asociado resulta ser



entonces

$$\langle \mathcal{A} \rangle = \text{Tr}\{\rho \mathcal{A}\}$$

La matriz densidad debe satisfacer tres condiciones:

- Hermiticidad:  $\rho^\dagger = \rho$ .
- $\text{Tr}\{\rho\} = 1$ : probabilidad total normalizada. Esto es equivalente a lo dicho de que la suma de los pesos estadísticos sea la unidad.
- Positividad:  $\langle u|\rho|u \rangle \geq 0 \forall |u\rangle$ ; o lo que es equivalente,  $\rho_j \geq 0 \forall j$ .

Usualmente no nos interesa todo el sistema, sino solo un subsistema de éste como por ejemplo  $A$  ó  $B$ . En tal caso, la información de  $A$  o de  $B$  viene dada por la matriz densidad reducida de esos subsistemas, que se consigue mediante la operación de *traza parcial*:

$$\begin{aligned} \rho_A = \text{Tr}_B\{\rho\} &= \sum_b \langle b|\rho|b \rangle \longrightarrow (\rho_A)_{aa'} = \sum_b \Psi^\dagger(a, b)\Psi(a', b) \\ \rho_B = \text{Tr}_A\{\rho\} &= \sum_a \langle a|\rho|a \rangle \longrightarrow (\rho_B)_{bb'} = \sum_a \Psi^\dagger(a, b)\Psi(a, b') \end{aligned} \quad (2.2)$$

Para nuestros propósitos, lo que nos interesa es que aunque nuestro sistema esté descrito por un estado puro sus subsistemas estarán descritos por estados correlacionados con los del otro subsistema, es decir, la operación de traza parcial en general convierte un estado puro en uno mezcla (salvo cuando el estado puro de partida es factorizable como producto tensorial de estados puros). Tiene por tanto sentido introducir la noción de *entropía de entrelazamiento* o *entropía de von Neumann*<sup>8</sup>:

$$S = -\text{Tr}\{\rho \log \rho\} \equiv -\sum_j \rho_j \log \rho_j \quad (2.3)$$

Fijémonos que la única forma de que  $S = 0$  es que  $\rho$  sea un operador densidad puro (y en tal caso, la función de onda se factoriza a  $|\Psi_{AB}\rangle = |\Psi_A\rangle \otimes |\Psi_B\rangle$ , *i.e.* no hay entrelazamiento). Para verlo, basta con ver que  $\rho$  sería un proyector asociado a un único estado y por tanto solo tiene un autovalor no nulo igual a 1 y los demás nulos, lo que hace que la suma sea nula. En el extremo opuesto,  $S$  será máxima cuando los estados que componen  $\rho$  estén totalmente descorrelacionados, cada uno con probabilidad de aparición entonces  $1/\dim \mathcal{H}$ , donde entonces  $S = \log \dim \mathcal{H}$ . De manera general, si  $P$  es un operador proyección a un subespacio de dimensión  $n$ , la

<sup>8</sup>Siguiendo el hilo de la explicación anterior, se puede definir un “operador entropía”  $S = -\log \rho$  cuyo valor medio vendría dado por  $\langle S \rangle = -\text{Tr}\{\rho \log \rho\}$  que es precisamente la entropía de von Neumann.

entropía de von Neumann asociada a  $\rho = P/\text{Tr}\{P\}$  será  $S = \log n$ , pues

$$\begin{aligned} S &= -\text{Tr}\{\rho \log \rho\} = -\text{Tr}\left\{\frac{P}{\text{Tr}\{P\}} \log \frac{P}{\text{Tr}\{P\}}\right\} \\ &= \frac{1}{\text{Tr}\{P\}} \text{Tr}\{P \log P - P \log \text{Tr}\{P\}\} = \log \text{Tr}\{P\} \\ &= \log n \end{aligned}$$

donde se ha usado que  $P \log P = 0$  para un proyector (pues si  $P = P^2$  entonces  $\log P = \log P^2 = 2 \log P$  lo que solo puede ser si  $\log P = 0$ ) y es fácil ver que la traza de un proyector es la dimensión del espacio al que proyecta. Vemos que, al estilo de la entropía de Boltzmann, la exponencial de la entropía de von Neumann es una medida de los grados de libertad en el sistema.

Otra característica interesante es que para un sistema en un estado puro compuesto de dos subsistemas, las entropías de von Neumann de sus matrices densidad reducidas son iguales. Para demostrarlo, veamos que  $\rho_A$  y  $\rho_B$  definidas como en (2.2) tienen los mismos autovalores. Sea  $\phi(a) = \langle a|\phi\rangle$  un autovector de  $\rho_A$ , es decir:

$$\sum_{ba'} \Psi^\dagger(a, b) \Psi(a', b) \phi(a') = \lambda \phi(a)$$

Supongamos que el autovalor  $\lambda$  es no nulo. Propongamos como autovector de  $\rho_B$  el estado

$$\chi(b') = \sum_{a'} \Psi^\dagger(a', b') \phi^\dagger(a')$$

Se ve entonces que:

$$\begin{aligned} \sum_{b'} (\rho_B)_{bb'} \chi(b') &= \sum_{ab'} \Psi^\dagger(a, b) \Psi(a, b') \chi(b') \\ &= \sum_{aa'b'} \Psi^\dagger(a, b) \Psi(a, b') \Psi^\dagger(a', b') \phi^\dagger(a') \\ &= \lambda \sum_a \Psi^\dagger(a, b) \phi^\dagger(a) = \lambda \chi(b) \end{aligned}$$

Se puede ver que los autovalores no nulos de las matrices densidad reducidas coinciden. Por tanto:

$$S_A \equiv S_B \tag{2.4}$$

y podemos referirnos simplemente a la entropía de entrelazamiento como término que engloba a ambas magnitudes. Este resultado es más sorprendente si recordamos que  $S_{A+B} = 0$  por ser el estado total puro. Luego la entropía no es aditiva en general, y esto se debe a que existe entrelazamiento (este resultado solo es válido para cuando el sistema global se encuentra en un estado puro).

En resumen, la entropía en general es una medida de la información de un sistema, es decir de cuántas preguntas de sí/no son necesarias responder para determinar

la configuración microscópica de un sistema (luego en (2.3) la entropía se mide en bits si el logaritmo está en base 2 y en *nats* si está en base  $e$ ). Cada una de estas respuestas aportará un bit de información, luego la entropía se mide naturalmente en bits. La entropía crece si nuestro desconocimiento del sistema es mayor, es decir si alberga más información de la que disponemos actualmente y necesitamos seguir realizando preguntas para determinar su estado. Por tanto, la entropía de entrelazamiento nos mide la pérdida de información cuando nos focalizamos en el estudio de un subsistema olvidando el otro, pues están correlacionados (como hemos visto, de no estarlo la entropía de von Neumann es nula). Esto tiene sentido con lo visto anteriormente, pues las correlaciones no se pueden localizar en ninguno de los dos sistemas y por tanto debe ocurrir que se satisfaga (2.4). En consecuencia la entropía sólo depende de aquellas características que comparten los subsistemas  $A$  y  $B$ . Desde el punto de vista geométrico lo único que comparten es la frontera (desde el punto analítico, el espectro de autovalores). Por tanto tiene sentido que la entropía encontrada traceando parcialmente a un subsistema escale con la frontera. Esto es cuando menos inspirador a la vista de la ecuación (1.6).

## 2.2. Cálculo de Srednicki

Antes de introducir el cálculo, veamos el cálculo de la entropía de entrelazamiento para osciladores armónicos acoplados. En este apartado se seguirá la notación usada por Srednicki en [8].

Para dos osciladores armónicos acoplados de masa unidad, se tiene que el hamiltoniano es:

$$H = \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2 + k_0(x_1^2 + x_2^2) + k_1(x_1 - x_2)^2) \quad (2.5)$$

Se puede ver que la introducción de los modos normales

$$\begin{aligned} x_+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2) \\ x_- &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2) \end{aligned}$$

desacopla (2.5) en

$$\tilde{H} = \frac{1}{2} (p_+^2 + \omega_+^2 x_+^2 + p_-^2 + \omega_-^2 x_-^2) \equiv H_+ \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes H_- \quad (2.6)$$

donde para hacer más evidente el desacople se ha reemplazado  $p_{1,2} \rightarrow p_{+,-}$ , y se han definido  $\omega_+^2 = k_0$  y  $\omega_-^2 = k_0 + 2k_1$ .  $H_{+,-}$  son los hamiltonianos para cada oscilador desacoplado y  $\mathbb{I}$  la identidad en el subespacio propio de cada hamiltoniano.

Las soluciones por tanto son los productos tensoriales de las soluciones de cada oscilador desacoplado. Para el estado fundamental:

$$\psi_0(x_1, x_2) = \frac{(\omega_+ \omega_-)^{1/4}}{\sqrt{\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\omega_+ x_+^2 + \omega_- x_-^2) \right] \quad (2.7)$$

Ahora calculemos la matriz densidad reducida  $\rho_{\text{out}}$  del estado fundamental correspondiente a trazar uno de los osciladores (oscilador “in”):

$$\begin{aligned}\rho_{\text{out}}(x_2, x'_2) &= \int_{\mathbb{R}} dx_1 \psi_0(x_1, x_2) \psi_0^\dagger(x_1, x_2) \\ &= \frac{(\gamma - \beta)^{1/2}}{\sqrt{\pi}} \exp \left[ -\frac{\gamma}{2}(x_2^2 + x_2'^2) + \beta x_2 x_2' \right]\end{aligned}\quad (2.8)$$

donde se han definido  $\beta = \frac{1}{4}(\omega_+ - \omega_-)^2 / (\omega_+ + \omega_-)$  y  $\gamma - \beta = \omega_+ \omega_- / (\omega_+ + \omega_-)$ . Nos planteamos entonces diagonalizarla, por lo que debemos resolver:

$$\int_{\mathbb{R}} dx' \rho_{\text{out}}(x, x') f_n(x') = p_n f_n(x)$$

donde  $p_n$  son los autovalores y  $f_n(x)$  los autovectores de la matriz densidad reducida. Se puede demostrar que la solución es:

$$\begin{aligned}p_n &= (1 - \xi) \xi^n \\ f_n(x) &= H_n(\alpha^{1/2} x) \exp(-\alpha x^2 / 2)\end{aligned}$$

donde  $H_n$  es un polinomio de Hermite,  $\alpha = (\gamma^2 - \beta^2)^{1/2} = (\omega_+ \omega_-)^{1/2}$  y  $\xi = \beta / (\gamma + \alpha)$ . Conocidos los autovalores, la entropía de von Neumann resulta:

$$S(\rho_{\text{out}}) = - \sum_n p_n \log p_n = - \log(1 - \xi) - \left( \frac{\xi}{1 - \xi} \right) \log \xi \quad (2.9)$$

donde se ha usado que

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \xi^n &= \frac{1}{1 - \xi} \\ \sum_{n=0}^{\infty} n \xi^n &= \xi \frac{d}{d\xi} \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n = \frac{\xi}{(1 - \xi)^2}\end{aligned}$$

Tales sumas convergen pues  $|\xi| < 1$  pues se encuentra que

$$\xi = \frac{(\omega_+ - \omega_-)^2}{(\omega_+ - \omega_-)^2 + 8\omega_+ \omega_- + 4(\omega_+ \omega_-) \sqrt{\omega_+ \omega_-}} < 1$$

Es interesante ver que si  $k_1 = 0$ ,  $\xi = 0$  y por tanto la entropía de von Neumann es nula. Eso se debe a que no hay acoplamiento para tal valor de la constante elástica, y se tienen dos subsistemas desacoplados desde el inicio, con lo que el autoestado fundamental se factoriza y no hay entrelazamiento.

Extendamos ahora el problema a  $N$  osciladores acoplados. Tal sistema responde al hamiltoniano:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N p_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N x_i K_{ij} x_j \quad (2.10)$$

donde la matriz  $\mathbf{K}$  es una matriz real y simétrica (sus autovalores son positivos). Tal hamiltoniano es una generalización natural del problema clásico de  $N$  osciladores, y  $\mathbf{K}$  resulta ser simétrica pues su expresión (clásica) es  $K_{ij} = \partial^2 V / \partial q_i \partial q_j$ . Por tanto, generalizando (2.7):

$$\psi_0(\mathbf{x}) = \frac{(\det \Omega)^{1/4}}{\pi^{N/4}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \Omega \mathbf{x} \right] \quad (2.11)$$

donde  $\mathbf{x} \equiv (x_1, \dots, x_N)$ ,  $\mathbf{x}^T$  es el transpuesto de  $\mathbf{x}$  y  $\Omega$  es la matriz cuyo cuadrado es  $\mathbf{K}$ . Tal matriz existe pues por ser  $\mathbf{K}$  simétrica es diagonalizable mediante matrices unitarias  $\mathbf{U}$  en la forma  $\mathbf{K} = \mathbf{U}^T \mathbf{K}_D \mathbf{U}$  con  $\mathbf{K}_D$  diagonal, y por tanto  $\Omega = \mathbf{U}^T \mathbf{K}_D^{1/2} \mathbf{U}$ . Si traceamos ahora sobre los  $n$  primeros osciladores (osciladores “in”):

$$\begin{aligned} \rho_{\text{out}}(x_{n+1}, \dots, x_N; x'_{n+1}, \dots, x'_N) &= \int \prod_{i=1}^n dx_i \psi_0(x_{n+1}, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_N) \\ &\quad \times \psi_0^\dagger(x_{n+1}, \dots, x_n, x'_{n+1}, \dots, x'_N) \end{aligned}$$

Para resolverlo, se puede escribir explícitamente

$$\Omega = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{C} \end{pmatrix}$$

con  $\dim \mathbf{A} = n$ ,  $\dim \mathbf{C} = N - n$ . Así separamos  $\Omega$  en los bloques donde se aplica la traza parcial. Salvo normalización (que no es necesario realizar, pues sabemos que los autovalores deben sumar la unidad), se obtiene

$$\rho_{\text{out}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \sim \exp \left[ -\frac{1}{2} (\mathbf{x}^T \gamma \mathbf{x} + \mathbf{x}'^T \gamma \mathbf{x}') + \mathbf{x}^T \beta \mathbf{x}' \right]$$

donde ahora  $\beta = \frac{1}{2} \mathbf{B}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}$ ,  $\gamma = \mathbf{C} - \beta$  y  $\mathbf{x} \equiv (x_{n+1}, \dots, x_N)$ . Esta expresión es similar a (2.8), con la salvedad de que en general  $\beta$  y  $\gamma$  no conmutan y por ello no son iguales las expresiones.

La idea sigue siendo encontrar los autovalores para calcular la entropía. Fijémonos que en (2.2) los autovalores no cambian si los calculamos para  $\det(\mathbf{G}) \rho_{\text{out}}(\mathbf{G}\mathbf{x}, \mathbf{G}\mathbf{x}')$  que para  $\rho_{\text{out}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ , siendo  $\mathbf{G}$  una matriz invertible que realiza un cambio de coordenadas. Por tanto, podemos escribir  $\gamma = \mathbf{V}^T \gamma_D \mathbf{V}$  con  $\mathbf{V}$  ortogonal y  $\gamma_D$  diagonal, y realizamos la transformación  $\mathbf{x} = \mathbf{V}^T \gamma_D^{-1/2} \mathbf{y}$  (la cual está bien definida pues los autovalores de  $\gamma_D$  son positivos por ser  $\gamma$  simétrica, ya que si  $\Omega$  lo es,  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{C}$  lo son). En las nuevas variables

$$\rho_{\text{out}}(\mathbf{y}, \mathbf{y}') \sim \exp \left( -(\mathbf{y}^T \mathbf{y} + \mathbf{y}'^T \mathbf{y}') / 2 + \mathbf{t}^T \beta' \mathbf{y} \right)$$

donde se ha definido  $\beta' = \gamma_D^{-1/2} \mathbf{V} \beta \mathbf{V}^T \gamma_D^{-1/2}$ . Se puede ahora diagonalizar  $\beta'$  mediante  $\mathbf{W}$  ortogonal, y en términos de las nuevas coordenadas  $\mathbf{z} = \mathbf{W}^T \mathbf{y}$  obtenemos finalmente que

$$\rho_{\text{out}}(\mathbf{z}, \mathbf{z}') \sim \prod_{i=n+1}^N \exp \left[ -\frac{1}{2} (z_i^2 + z_i'^2) + \beta'_i z_i z_i' \right] \quad (2.12)$$

con  $\beta_i$  los autovalores de  $\beta'$ . Lo interesante es que hemos *desacoplado* la matriz de densidad reducida de  $N - n$  osciladores en producto de matrices densidad reducidas de dos osciladores, pues cada término en (2.12) es equivalente a la expresión de (2.8) con los cambios  $\gamma \leftrightarrow 1$  y  $\beta \leftrightarrow \beta'_i$ . Por tanto, la entropía asociada será

$$S = \sum_i S(\xi_i)$$

donde  $S(\xi_i)$  viene dado por (2.9) y  $\xi_i = \beta'_i / (1 + (1 - \beta_i'^2)^{1/2})$ .

Queremos ahora aplicar lo anterior a un campo escalar sin masa. Tal campo vendrá descrito por el hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2} \int d^3x (\pi^2(\mathbf{x}) + |\nabla\varphi(\mathbf{x})|^2) \quad (2.13)$$

Si introducimos ahora las componentes en ondas parciales

$$\begin{aligned} \varphi_{lm}(x) &= x \int d\Omega Z_{lm}(\theta, \phi) \varphi(\mathbf{x}) \\ \pi_{lm}(x) &= x \int d\Omega Z_{lm}(\theta, \phi) \pi(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

con  $x = |\mathbf{x}|$  y  $Z_{lm}$  los armónicos esféricos reales:  $Z_{l0} = Y_{l0}$ ,  $Z_{lm} = \sqrt{2}\Re\{Y_{lm}\}$  si  $m > 0$  y  $Z_{lm} = \sqrt{2}\Im\{Y_{lm}\}$  si  $m < 0$ . Se encuentra así que  $\varphi_{lm}, \pi_{lm}$  son hermíticos y satisfacen las relaciones de conmutación canónicas, por lo que (2.13) se reescribe como  $H = \sum_{lm} H_{lm}$ , con:

$$H_{lm} = \frac{1}{2} \int_0^\infty dx \left\{ \pi_{lm}^2(x) + x^2 \left( \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\varphi_{lm}(x)}{x} \right] \right)^2 + \frac{l(l+1)}{x^2} \varphi_{lm}^2(x) \right\} \quad (2.14)$$

Para evaluar lo anterior necesitamos regular la teoría. Para ello, sustituimos el espacio por una red de espaciado  $a$ , por lo que la coordenada continua  $x$  pasa a tomar valores solo en los puntos discretos de la red. Esto induce un corte ultravioleta en frecuencias espaciales de  $a^{-1}$ . Para frecuencias grandes, el corte infrarrojo se consigue suponiendo que el sistema se encuentra en una caja esférica de radio  $L = (N + 1)a$ , donde  $N \gg 1$ . Exijimos además que las funciones  $\varphi_{lm}$  sean nulas para  $x \geq L$ . Por tanto, el corte infrarrojo viene dado por  $L^{-1}$ . La integral (2.14) se discretiza, obteniendo

$$H_{lm} = \frac{1}{2a} \sum_{j=1}^N \left[ \pi_{lm,j}^2 + (j + 1/2)^2 \left( \frac{\varphi_{lm,j}}{j} - \frac{\varphi_{lm,j+1}}{j+1} \right)^2 + \frac{l(l+1)}{j^2} \varphi_{lm,j}^2 \right] \quad (2.15)$$

que es análoga de (2.10). Por tanto, podemos pensar en calcular la entropía  $S_{lm}(n, N)$  correspondiente a trazar los primeros  $n$  puntos del estado fundamental (correspondiente al vacío) de  $H_{lm}$ . El estado fundamental de  $H$  es producto directo del estado

fundamental para cada  $H_{lm}$  pues hemos desacoplado los hamiltonianos, y por tanto la entropía será la suma  $S(n, N) = \sum_{lm} S_{lm}(n, N)$ . Fijémonos que la ecuación (2.15)

no depende de  $m$  directamente, luego  $S_{lm}(n, N) = S_l(n, N)$ . El no depender de  $m$  hace que la suma sobre  $m$  contribuya con un factor  $2l + 1$  (degeneración de  $l$ ), luego  $S(n, N) = \sum_l (2l + 1) S_l(n, N)$ . Srednicki define entonces en su artículo la cantidad

$R = (n + 1/2)a$ , que es un radio a medio camino entre el conjunto de puntos traceado, concretamente divide en dos el conjunto de puntos en traceados y sin tracear (tal como haríamos para obtener la información accesible en el exterior de un agujero negro). Srednicki evalúa numéricamente la suma para la entropía, y encuentra que escala como

$$S = 0.3 \frac{R^2}{a^2} \equiv \frac{12}{10\pi} \frac{A}{4a^2} \quad (2.16)$$

Fijémonos que el factor que multiplica a la entropía no es la unidad como requiere la fórmula de Bekenstein. Lo notable de esta ecuación es que la entropía de entrelazamiento; como hemos visto debida a tracear la región a la cual en caso de que nuestro sistema fuera un agujero negro no tendríamos acceso, resulta proporcional al área de la frontera que separa ambas regiones. Además, aparece el factor  $a$  del corte ultravioleta, que en opinión del autor de este trabajo emula el papel de la longitud de Planck en la expresión (1.6). Añadamos además una reflexión de Bekenstein sacada de [9]. Para éste, el cálculo de la entropía es divergente debido a que consideramos modos *de más* al tracear de manera tan ruda. Tal cálculo implica no conocer nada acerca del interior del agujero negro, lo cual no es cierto pues sabemos que su masa es debida a la energía de la materia que ha tragado. Bekenstein propone que el traceo debería hacerse sobre el operador densidad  $\rho \times \Theta(E - \hat{H}_{\text{int}})$ , con  $\Theta$  la función escalón,  $E = mc^2$  la energía en reposo del agujero negro y  $\hat{H}_{\text{int}}$  el hamiltoniano de los grados de libertad interiores. En tal artículo demuestra que bajo esta prescripción, dada  $E$  acotada la entropía ha de ser finita.

Este cálculo de Srednicki está hecho para un campo escalar sin masa. En un acto de fe se podría pensar que este método podría servir para calcular el número total de campos intervinientes en la entropía del agujero negro (*problema de las especies*), pues los demás campos también deberían contribuir a la entropía con factores proporcionales a  $R^2$ . El ya citado artículo de Bekenstein argumenta que tal idea podría no andar desencaminada, encontrando que con las especies conocidas la entropía de entrelazamiento mediante la traza parcial de sus campos se acercaría al valor real de un cuarto del área medida en áreas de Planck-Wheeler.

### 2.3. Cálculo de Susskind y Uglum

Ahora resumiremos un cálculo realizado por Susskind y Uglum ([10], [11]). No lo reproduciremos en detalle pues para ello necesitaríamos entrar a discutir el espacio de Rindler, pero comentemos los puntos esenciales que nos permitirán continuar.

Lo que Susskind y Uglum proponen es aprovechar el *efecto Unruh*. Debido a éste,

por el principio de equivalencia una persona en un campo gravitatorio describirá el vacío por una matriz densidad de tipo Maxwell-Boltzmann:

$$\rho_{MB} = \frac{\exp(-\beta H)}{\text{Tr}\{\exp(-\beta H)\}} \quad (2.17)$$

con  $\beta = 1/T$ . Tal matriz describe un sistema que evoluciona mediante  $H$  en equilibrio térmico a temperatura  $T$ . La entropía de von Neumann de tal matriz densidad nos permite recuperar las expresiones típicas de mecánica estadística de la energía en función de la entropía, etc.

Con el hamiltoniano de un campo escalar masivo en el espacio de Rindler y usando (2.17), mediante consideraciones termodinámicas encuentran:

$$S \approx \frac{1}{96\pi^2} \frac{A}{\epsilon^2} \quad (2.18)$$

con  $A$  el área del horizonte de sucesos y  $\epsilon$  un parámetro para el corte ultravioleta, al igual que en el cálculo de Srednicki.

De nuevo, vemos que la entropía escala con el área del horizonte de sucesos y debe su existencia a que existen infinitos modos normales del campo conforme nos acercamos al horizonte de sucesos. Dado que sabemos que la entropía del agujero negro es finita y viene dada por (1.6), este resultado indica que el valor que calculamos es muy sensible respecto al corte ultravioleta que introduzcamos cuando nos aproximamos a muy pequeñas escalas.

Si queremos hacernos una idea del valor de  $\epsilon$ , podemos exigir que la entropía en (2.18) no exceda el valor calculado por Bekenstein:

$$\frac{1}{96\pi^2} \frac{A}{\epsilon^2} \lesssim \frac{A}{4l_P^2} \quad (2.19)$$

de donde se obtiene que  $\epsilon \gtrsim l_P/15$ . El resultado no es sorprendente pues se espera que las divergencias en gravedad cuántica serán suprimidas por un corte ultravioleta cuando las distancias sean menores que la de Planck. La entropía que se obtiene sin el corte ultravioleta es infinita, lo que implica que los grados de libertad de la teoría cuántica de campos conforme nos aproximamos al horizonte tiende a infinito. Lo que Susskind argumenta es que necesitamos un nuevo tipo de teoría cuyos grados de libertad efectivos vayan a cero muy cerca del horizonte de sucesos. Dado que el cálculo anterior refuerza la idea de que tal distancia debe ser  $\sim l_P$ , Susskind propone que el horizonte de sucesos *matemático* sea remplazado por una membrana efectiva, el *horizonte estirado* (ver referencia [12]) a una distancia del matemático de entorno una longitud de Planck; que coincide con la distancia a la cual se espera que efectos cuánticos y gravitatorios cohabiten. Como beneficios, ganamos que este horizonte “efectivo” permite dinámica de tipo tiempo (partículas masivas). De hecho, Susskind dedica en [11] un capítulo entero a ver propiedades del horizonte estirado, tales como que posee conductividad eléctrica.



### 2.3.1. Frefo vs Fido

Pensemos ahora en la descripción del horizonte de sucesos de un agujero negro estático que harían dos observadores imaginarios que denominaremos FIDOS (por *fiducial* en inglés, o fiduciario<sup>9</sup> en español) y FREFOS (por *free falling*).

Los FIDOS son observadores estáticos, cada uno localizado en la posición fija  $(r, \theta, \phi)$ , portando un reloj que puede ser ajustado para marcar el tiempo de las coordenadas de Schwarzschild  $t$ . Al estar en diferentes posiciones radiales, los FIDOS ven sus relojes corriendo a diferentes velocidades, pues la relación entre el tiempo propio  $\tau$  y el medido en el infinito  $t$  es

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{g_{00}} = \left(1 - \frac{2mG}{c^2 r}\right)^{1/2} \quad (2.20)$$

Por ejemplo, para un Fido en  $r = R_s + \epsilon$  (con  $\epsilon \ll 1$ ) el reloj que marque  $t$  avanzará muy deprisa.

Los FIDOS pueden pensarse como sistemas de referencia imaginarios pero también como verdaderos observadores externos estáticos, los cuales deben estar acelerando para no caer al agujero negro; bien por algún tipo de motor que los impulse o por algún tipo de sistema de suspensión de cuerdas amarradas a gran distancia del agujero negro.

Los FREFOS en cambio corresponden a sistemas en caída libre al agujero negro. Para ellos localmente el espaciotiempo es de Minkowski por el principio de equivalencia, y cuando cruzan el horizonte de sucesos no observan nada excepcional (salvo que dejan de poder comunicarse con el exterior). Se puede demostrar (ver A.1, ecuación (A.5)) que cruzan el horizonte de sucesos y llegan a la singularidad en un tiempo propio finito.

Desde la perspectiva de un Fido (que es muy útil pues puede ser comunicada a observadores distantes), el horizonte de sucesos es una superficie de *redshift* infinito, y por tanto de dilatación temporal infinita. Un Fido nunca puede ver un Frefo caer al agujero negro. Verá que el Frefo se ralentiza en su caída, y cada vez le toma un tiempo más grande recorrer una distancia más pequeña. Susskind demuestra que el momento de un Fido medido por un Frefo diverge exponencialmente con  $t$ , mientras que su longitud propia decrece exponencialmente con  $t$ . Los FIDOS ven que la materia que cae sufre una contracción de Lorentz y se va “estrechando” y confinando en capas sedimentarias entorno a  $r = R_s$ . De acuerdo a la física clásica (es decir, sin incluir mecánica cuántica) los FREFOS verán que la materia se acumula entorno al horizonte de sucesos a distancias infinitesimalmente pequeñas, pero nunca la verán caer (ver la figura 1). Mecanocuanticamente, podemos esperar que tal imagen sea incierta a distancias menores del horizonte que la distancia de Planck.

---

<sup>9</sup>Un *fiduciario* es un objeto utilizado para la observación de sistemas de imágenes, el cual aparece en la imagen para ser usado como punto de referencia o de medida, como por ejemplo poner una regla al sacar una foto de un objeto para que sirva de escala.

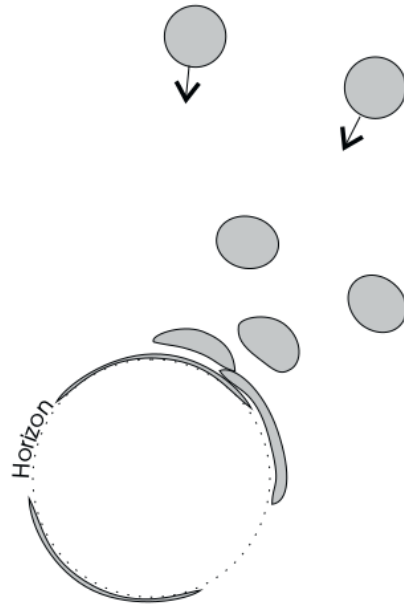


Figura 1: Capas sedimentarias entorno al horizonte de sucesos formadas por materia en caída libre vistas por un Frefo.

Es esta materia infinitamente comprimida entorno al horizonte de sucesos la que da sentido al horizonte estirado. De acuerdo a un Fido, esta materia se irá calentando por la radiación de Hawking, y desde su punto de vista la información no pasa de ahí. En tal zona, se calienta y posteriormente se reemite como radiación de Hawking correlacionada, conservándose la información.

### 3. Paradoja de la información

En este capítulo, veremos los principios físicos cuya compatibilidad ha sido desafiada. Tales principios son: la conservación de la información, el principio de equivalencia y el teorema de no clonación. En el siguiente capítulo, veremos la solución propuesta por Susskind para remediar la incompatibilidad.

#### 3.1. Conservación de la información

Durante todo el trabajo hemos estado asumiendo que la entropía en el universo crece tal como dicta la segunda ley de la termodinámica, pero ¿es ésto cierto?

Realmente tanto en mecánica clásica como cuántica hay un sentido preciso por el cual la información se conserva, y por ende la entropía se mantiene constante. En mecánica clásica se conoce como el *teorema de Liouville*. Cuando tenemos un gran número de partículas (digamos que  $n$ ), seguirle la pista a cada una o conocer sus posiciones y velocidades iniciales es impracticable. En cambio, vemos que el estado macroscópico del sistema puede darse mediante muchas realizaciones particulares de los subsistemas que los componen. Cada una se dice que es un microestado del sistema, y el conjunto de todos los microestados del sistema compatibles con el macroestado delimita un volumen  $\Gamma(t)$  en el espacio  $6n$  dimensional de fases. Pues tal teorema demuestra que, si cada punto evoluciona según la evolución canónica dada por el Hamiltoniano, el volumen es una constante de movimiento. Es decir, tal volumen evoluciona como un fluido incompresible (*i.e.* con densidad constante). Por tanto, dado un macroestado alcanzable a partir de cierto número de microestados, el estado evoluciona de manera que el número de microestados compatibles con él no crece ni decrece. Osea que no necesitamos ni añadir información para seguir describiendo al sistema ni tampoco la perdemos. La entropía es el logaritmo del número de microestados en  $\Gamma(t)$ , y si éstos no cambian, la entropía es constante.

¿Por qué entonces decimos que la entropía crece? Usualmente lo que hacemos es hacer promedios sobre el espacio de fases, y para ello realizamos un *mallado* de éste donde cada celdilla de la malla tiene un volumen finito (por ejemplo, el principio de incertidumbre nos diría que  $\Delta q \Delta p \sim \hbar$ ). En la evolución del sistema,  $\Gamma(t)$  se puede volver muy complicado y cuando promediamos (en la literatura inglesa se puede encontrar el término “coarse graining”, traducible como *granulado grueso*) parecerá que el volumen ocupado por nuestros microestados en el espacio de fases está creciendo (ver figura 2). Éste es el origen del crecimiento de la entropía que medimos.

En mecánica cuántica la conservación de la información viene dada por la unitariedad de la evolución de la matriz densidad. Tal unitariedad implica que al final de un proceso podemos revertir la situación y volveremos al mismo estado de inicio, por lo que no se ha perdido ni ganado información en la evolución. La unitariedad



Figura 2: Evolución de  $\Gamma(t)$  hacia una forma más complicada. Nótese que el promedio resultante al mallar el espacio de fases con celdas de volumen fijo hará que el volumen medido crezca con el tiempo de manera efectiva.

se expresa en el hecho de que la matriz densidad evoluciona como

$$\rho(t) = U(t, t_0)\rho(t_0)U^\dagger(t, t_0) \quad (3.1)$$

con  $U(t, t_0)$  el operador evolución que evoluciona el estado del sistema de  $t_0$  a  $t$ . De igual manera, en procesos de scattering la conservación de la información equivale a la unitariedad de la matriz  $S$  (ver apartado 4.1).

Si como antes, nos planteamos abordar un sistema del que poseemos un conocimiento parcial, la información vendrá codificada por una matriz densidad  $\rho$ . En caso de que  $\rho$  sea un proyector (dividido por su traza para asegurar que es una matriz densidad legítima) ya vimos que la entropía iba como el logaritmo de la dimensión del espacio al que proyecta (aquel en el que tenemos información), y la evolución unitaria asegura que se mantendrá constante. De hecho, el paralelismo entre mecánica clásica y cuántica es aun mayor pues la matriz densidad es el análogo cuántico de la densidad de probabilidad en el espacio de fases en mecánica clásica. En mecánica cuántica, la entropía (que en inglés denotan como “fine grained” entropía, o de *granulado fino*) tampoco crece en un sistema cerrado. La entropía que da cuenta del detalle fino en mecánica cuántica es la entropía de von Neumann, dada por (2.3).

La evolución unitaria nos permite demostrar que la entropía de von Neumann es una constante de movimiento:

$$S(t) = -\text{Tr}\{\rho_t \log \rho_t\} = -\text{Tr}\{U\rho_0U^\dagger \log(U\rho_0U^\dagger)\}$$

Usando que el desarrollo del logaritmo es

$$\log A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (A - \mathbb{I})^n$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
\log \rho_t &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (U \rho_0 U^\dagger - \mathbb{I})^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} (U \rho_0 U^\dagger)^{n-k} (-\mathbb{I})^k \\
&= U \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} (\rho_0)^{n-k} (-\mathbb{I})^k \right) U^\dagger \\
&\equiv U \log(\rho_0) U^\dagger
\end{aligned}$$

por tanto

$$S(t) = -\text{Tr}\{\rho_t \log \rho_t\} = -\text{Tr}\{U \rho_0 U^\dagger U \log \rho_0 U^\dagger\} \equiv -\text{Tr}\{\rho_0 \log \rho_0\} = S(t_0)$$

donde hemos usado que  $\text{Tr}\{AB\} = \text{Tr}\{BA\}$ .

Como vimos en el apartado 2.1, la entropía de von Neumann mide el entrelazamiento (correlaciones cuánticas) entre dos subsistemas, es decir la pérdida de información cuando te focalizas en solo uno de ellos. Ampliemos ahora la discusión de ese apartado.

Supongamos un gran sistema  $\Sigma$  compuesto de subsistemas menores  $\sigma_i$ , cada uno de estos subsistemas interaccionando débilmente con los otros. El sistema está en un estado puro con energía  $E$ , mientras que cada subsistema tendrá energía  $\varepsilon_i$ .

Para la mayoría de sistemas complejos es generalmente cierto que los subsistemas se regirán por una matriz densidad térmica, esto es

$$\rho_i = \frac{e^{-\beta H_i}}{\text{Tr}\{e^{-\beta H_i}\}}$$

con  $H_i$  el hamiltoniano del subsistema. Tal matriz densidad maximiza la entropía para una energía del subsistema dada  $\varepsilon_i$ . Recordemos que si el sistema total está en un estado puro, la entropía “fine grained” (FG)  $S_\Sigma$  es nula, pese a que sus subsistemas tengan entropía no nula por correlaciones.

Se define la entropía “coarse grained” (CG) o entropía térmica del sistema compuesto como la suma de las entropías de los subsistemas que lo componen

$$S_{CG} = \sum_i S_i \tag{3.2}$$

que por definición es aditiva.

Ésta es la entropía que la segunda ley de la termodinámica asegura que crece, luego no es una magnitud conservada. Para verlo, supongamos que partimos con el sistema total en un estado puro resultante del producto tensorial de estados puros para los subsistemas (sin correlación). Por tanto, la entropía FG de cada subsistema así como la del total es nula al inicio.

Al evolucionar el sistema, los subsistemas desarrollarán correlaciones, dejando de ser las funciones de onda de cada subsistema factorizables (están entrelazadas). Las entropías FG de cada subsistema se volverán no nulas por tal entrelazamiento, y por tanto la entropía CG del sistema total habrá crecido a un valor mayor que cero. Sin embargo, la entropía FG del sistema total sigue siendo nula porque el sistema está aislado y sigue en un estado puro.

Fijémonos también que dado un subsistema  $\Sigma_1$ , que puede contener un solo subsistema  $\sigma_1$ , varios o incluso todos, la entropía CG será mayor que la FG (de entrelazamiento con el resto del sistema  $\Sigma - \Sigma_1$ )

$$S_{CG}(\Sigma_1) > S_{FG}(\Sigma_1)$$

pues en el límite  $\Sigma_1 \rightarrow \Sigma$  el miembro derecho es nulo, mientras que el izquierdo no.

Ahora podemos precisar qué entendemos por información de un sistema. Se puede definir la información  $I$  como

$$I = S_{CG} - S \quad (3.3)$$

donde por comodidad denotaremos  $S$  como  $S_{FG}$  siempre.

Fijémonos que esta definición encaja con lo que intuitivamente entendíamos por información: no es que se pierda información; al igual que la entropía “fine grained” no crece, lo que ocurre es que el desconocimiento aumenta porque el acceso a la información que teníamos se hace más difícil, como vemos en la figura (2). Usualmente como los menores subsistemas se rigen por matrices de densidad térmicas, su entropía FG coincide con la entropía CG y por tanto su información es nula. En el otro extremo, el sistema total tiene entropía FG nula y la información es máxima y coincide con su entropía CG. Podemos pensar que el sistema total tiene correlaciones sutiles ocultas que hacen que su estado total sea puro.

Nos podríamos preguntar acerca de cuánta información hay en un subsistema cuyo tamaño sea moderado. Parece plausible que la información variase de manera suave desde cero para  $\sigma_i$  hasta  $S_{CG}$  para  $\Sigma$ . Sin embargo no ocurre tal cosa, sino que para sistemas menores que aproximadamente la mitad del tamaño del total la información es despreciable. En el artículo de D. Page (ver [13]) se conjetura que, denotando como  $\Sigma_1$  al subsistema y  $\Sigma$  al sistema total, y estando el segundo en un estado puro, se tiene que

$$I_{m,n} = S_{CG} - S = \log m + \frac{m-1}{2n} - \sum_{k=n+1}^{mn} \frac{1}{k} \quad (3.4)$$

con  $m = \dim \Sigma_1 \leq n = \dim \Sigma$ . Page identifica  $S_{CG} = \log m$  dado que esta cantidad es la máxima entropía que un subsistema puede tener, y por tanto define información como el déficit de la entropía FG respecto a ésta.

Tal expresión es una conjetura que Page realiza a partir de estimar los límites  $1 \leq m \ll n$  y  $1 \ll m \leq n$  y la comprueba para varios casos particulares con buen

resultado. Para nuestros propósitos, nos interesa que para el caso en que el subsistema  $\Sigma_1$  es mucho menor, se demuestra que  $I(\Sigma_1) \approx 0$  pues en tal caso encuentra que

$$S \approx \log m - \frac{m^2 - 1}{2mn + 2} \rightarrow \log m - \mathcal{O}\left(\frac{m}{n}\right)$$

Para el caso  $\Sigma_1 < \Sigma$ , pero ambos de tamaño suficiente, se tiene que

$$I(\Sigma_1 < \Sigma) = \frac{m}{2n} \quad (3.5)$$

luego aun cuando  $\Sigma_1 < \frac{1}{2}\Sigma$  la información contenida no alcanza el bit. Ahora es fácil demostrar que cuando  $\Sigma_1 > \frac{1}{2}\Sigma$ :

$$S(\Sigma_1) \approx S_{CG}(\Sigma - \Sigma_1) \quad (3.6)$$

pues  $S(\Sigma - \Sigma_1) = S(\Sigma_1)$  por las propiedades que demostramos de la entropía de entrelazamiento (y porque el sistema está en un estado puro aunque arbitrario). Pero como  $\Sigma - \Sigma_1 < \frac{1}{2}\Sigma$  en este caso,  $S(\Sigma - \Sigma_1) \approx S_{CG}(\Sigma - \Sigma_1)$ , de donde obtenemos entonces (3.6).

En general,  $S_{CG}(\Sigma - \Sigma_1) \approx (1 - m/n)S_{CG}(\Sigma)$  por la aditividad de la entropía térmica. Para  $\Sigma_1 > \frac{1}{2}\Sigma$ , la información será según este razonamiento más simple

$$\begin{aligned} I(\Sigma_1) &= S_{CG}(\Sigma_1) - S(\Sigma_1) \\ &\approx \frac{m}{n}S_{CG}(\Sigma) - \left(1 - \frac{m}{n}\right)S_{CG}(\Sigma) \\ &= \left(\frac{2m}{n} - 1\right)S_{CG}(\Sigma) \end{aligned} \quad (3.7)$$

que satisface que en  $m \sim n/2$  es despreciable. En la figura 3 se muestra el crecimiento de las magnitudes estudiadas.

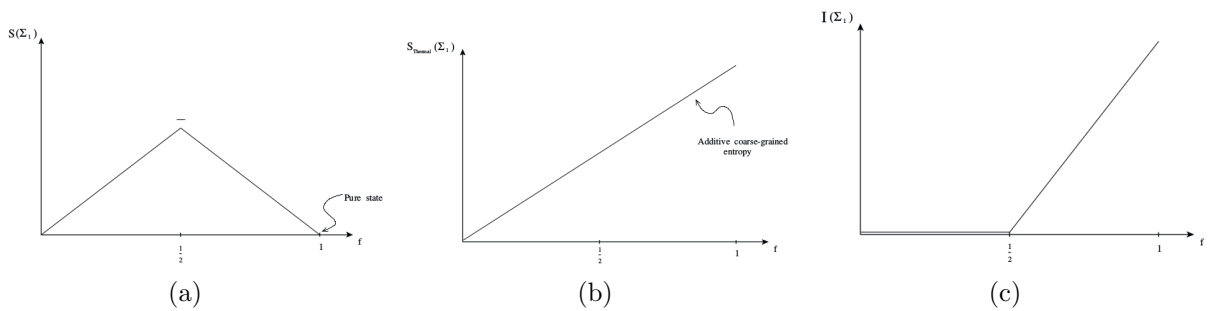


Figura 3: En a) entropía de von Neumann, b) entropía CG y c) información de  $\Sigma_1$  en función de  $f = m/n$ .

Este razonamiento se puede aplicar para estudiar la información emitida por un agujero negro cuando se evapora. Veamos una analogía en la que nadie duda que las leyes de la física apliquen sin modificaciones.

Supongamos una caja de paredes reflectantes en cuyo interior introducimos una bomba que puede explotar y llenar la caja de radiación. Practicamos un pequeño agujero que permite a la radiación térmica dejar lentamente la caja. Nuestro sistema total  $\Sigma$  se subdivide en el subsistema  $B$  que incluye el interior de la caja, y  $A$  que consiste en todo lo externo a ella ( $A = \Sigma - B$ ), en este caso los fotones que consigan ir escapando.

Inicialmente la bomba está en su estado fundamental (es lo análogo a un agujero negro formandose a partir de un estado inicial puro), y por tanto la entropía FG es nula. Cuando la bomba explota, llena la caja con radiación térmica. Su entropía CG comienza a crecer, pero como al inicio aun no han escapado fotones su entropía FG sigue siendo nula y  $S(A) = 0$  aun. Ahora los fotones comienzan a escapar lentamente. Los fotones del interior y del exterior están entrelazados ya que todos se han creado a partir de un estado inicial puro. Por tanto, la entropía de von Neumann (de entrelazamiento) de  $A$  y  $B$  (que es la misma) comienza a crecer. La entropía CG en la caja decrece por ir escapandose fotones (subsistemas), ya que es aditiva y la entropía CG en  $A$  comienza a crecer.

Cuando todos los fotones hayan escapado, la entropía en la caja (tanto FG como CG) tenderá a cero, y la entropía CG en el exterior tenderá a su máximo valor. La segunda ley de la termodinámica asegura que la entropía CG crecerá, luego finalmente la entropía CG en  $A$  será mayor que la que tenía  $B$  justo tras la explosión. Pero fijémonos que la entropía FG en  $A$  será nula, pues todos los fotones tendrán sutiles correlaciones que hacen que el estado conjunto sea puro. En la figura 4 se muestra la evolución de todas las magnitudes discutidas.

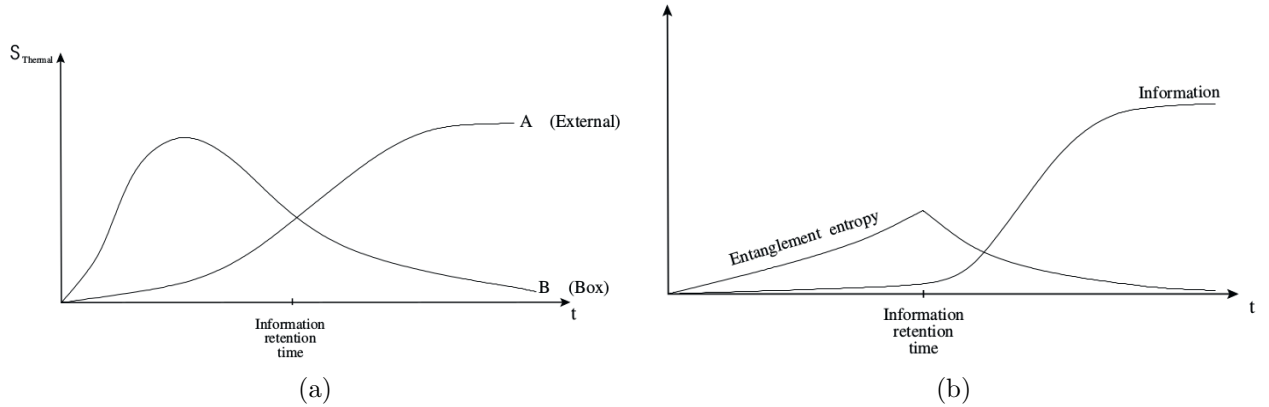


Figura 4: En a) entropía CG en  $A$  y  $B$  en función del tiempo, b) entropía de entrelazamiento e información de la radiación (es el análogo a la emitida por un agujero negro al evaporarse).

El punto en el cual  $S_{CG}(A) = S_{CG}(B)$  define el tiempo a partir del cual la información en el exterior comienza a crecer. Previamente aunque gran cantidad de fotones hayan escapado (y por tanto energía), la información es nula. De manera tosca podemos decir que la información en el exterior comienza a crecer cuando la mitad de la entropía CG de los fotones finales se ha alcanzado. Se define tal tiempo como



el tiempo de retención de información (o también *Page time* por su descubridor). Equivale a la cantidad de tiempo que se debe esperar hasta poder obtener al menos un bit de información del estado inicial de la caja.

Con este ejemplo vemos como la conservación de la información aplica en un sistema cuántico usual. Dados los razonamientos implicados, podríamos esperar que la conservación de la información también se diera en la evaporación de un agujero negro (para ver este razonamiento aplicado a la evaporación de un agujero ver [14]). Es decir, esperamos que la ley de la conservación de la información sea una ley fundamental de la naturaleza.

### 3.2. Principio de equivalencia

La segunda ley que nos concierne es la que da pie a la teoría de la relatividad general: el principio de equivalencia.

Llanamente viene a decir que cuando las fuerzas de marea son despreciables (es decir, en un entorno lo suficientemente reducido) un campo gravitatorio es indistinguible de un sistema de referencia acelerado. La puntilla de fuerza de mareas tiene que ver con el tensor de curvatura de Riemann, pues dependen de él. Precisamente, se puede demostrar que en cada punto del espacio tiempo podemos escoger unas coordenadas (llamadas coordenadas localmente inerciales) tal que la métrica se reduzca a la de Minkowski y sus primeras derivadas se anulen, pero no así las segundas. Como el tensor de Riemann depende de las segundas derivadas de la métrica, no podemos hacer que se anule. Lo que si ocurrirá es que suficientemente cerca del punto de interés las fuerzas de marea no sean medibles.

El principio de equivalencia trata a los observadores en caída libre como inerciales, y por tanto para ellos nada extraño ocurre en el horizonte de sucesos, que localmente experimentan como espaciotiempo plano. Por otro lado, un observador que trate de no caer al agujero negro verá los conocidos efectos discutidos en el apartado 2.3.1.

### 3.3. Teorema de No-clonación

Por último, la tercera ley de la naturaleza que juega un importante papel en esta controversia es el teorema de no-clonación, es decir, de la imposibilidad de replicar información en cuántica de manera fiel. Este teorema no es más que un reflejo del principio de incertidumbre de Heisenberg, que impide que sobre un sistema midamos con arbitraria precisión variables conjugadas. Copiando el estado, podríamos violar tal principio.

La contradicción se hace más evidente apelando a la linealidad de las transformaciones en cuántica. Consideremos que tenemos un “aparato” que cuando se le inserta un sistema cuántico lo copia y devuelve el antiguo y una copia idénticas. Por ejemplo, entra un electrón con spin *up* y salen dos idénticos ( figura 5).



Figura 5: Máquina clonadora de estados cuánticos. Se ve como entra un electrón con un spin definido y salen dos copias de éste.

Es decir, la máquina realiza la transformación

$$|\uparrow\rangle \rightarrow |\uparrow\rangle|\uparrow\rangle$$

o, representando la transformación por un operador  $\hat{C}$

$$\hat{C}|\uparrow\rangle = |\uparrow\rangle|\uparrow\rangle \quad (3.8)$$

y de igual manera

$$\hat{C}|\downarrow\rangle = |\downarrow\rangle|\downarrow\rangle \quad (3.9)$$

Para ver que esto contradice a la formulación usual de la cuántica, veamos que hace tal máquina con un estado polarizado según el eje x, es decir un estado de la forma  $(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)/\sqrt{2}$ :

$$\begin{aligned} \hat{C} \left( \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) \right) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{C}|\uparrow\rangle + \hat{C}|\downarrow\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle|\downarrow\rangle) \end{aligned}$$

donde se han usado (3.8) y (3.9) junto con la linealidad de  $\hat{C}$  impuesta a todos los operadores en cuántica.

Pero esto no coincide con la definición original de lo que debía hacer la máquina, que era copiar el estado

$$\begin{aligned} \hat{C} \left( \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) \right) &= \\ &= \left( \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) \right) \left( \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) \right) \quad (3.10) \\ &= \frac{1}{2} (|\uparrow\rangle|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle|\downarrow\rangle + |\uparrow\rangle|\downarrow\rangle + |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle) \end{aligned}$$

luego no podemos tener una transformación en cuántica que copie estados y sea lineal.

## 4. Complementariedad

En la sección anterior hemos visto los tres principios de la física cuya compatibilidad pone en duda esta paradoja. Las leyes de la física son tales que la información se conserva, luego si el agujero negro se evapora la radiación resultante debe estar entrelazada y podremos recuperar la información que cayó en él. Pero si el principio de equivalencia ha de cumplirse, un observador que cae al agujero negro no ve que se emita radiación de Hawking, y para él toda la información que cae está pasando con él y esta dentro. Pero por el principio de no-clonación, no podemos tener dos copias de la información; una dentro y otra fuera. ¿Cómo se pueden solucionar estas contradicciones? Veremos la solución aportada por Susskind (ver [12]): la complementariedad de los agujeros negros.

Veamos primero por qué Hawking afirmaba que la información se perdería al caer a un agujero negro, y no en el sentido efectivo de que crece  $S_{CG}$ , sino que la información se perdería en el sentido FG, violándose el primero de los principios de la física que comentamos.

### 4.1. Pérdida de información

Pensemos en un agujero negro formado a partir del colapso de partículas sin masa (ver figura 6).

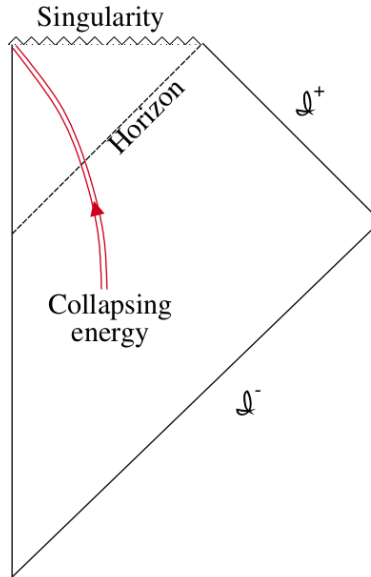


Figura 6: Diagrama de Penrose de la formación de un agujero negro por colapso.

Como vimos en el apartado 3.1, una forma de establecer la conservación de la información es por la unitariedad de la evolución del estado inicial  $|\psi_{in}\rangle$ :

$$|\psi_{out}\rangle = \hat{S}|\psi_{in}\rangle \quad (4.1)$$

donde  $\hat{S}$  es la matriz de *scattering*, definida como

$$\hat{S} = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty, t \rightarrow \infty} U(t, t_0)$$

por lo que establecemos la conservación de la información para estados asintóticos, aunque obviamente cualquier evolución intermedia también será unitaria. Dado que  $\hat{S}$  así definida es unitaria, se tiene que  $|\psi_{\text{in}}\rangle = \hat{S}^\dagger |\psi_{\text{out}}\rangle$ .

Lo que Hawking plantea es estudiar este proceso con la estructura de espaciotiempo de un agujero negro de fondo (y suponiendo que no se modifica en el proceso). Si nos preguntamos por el destino de partículas no masivas, sabemos que todas parten de  $\mathcal{I}^-$ , con espacio de Hilbert inicial  $H_{\text{in}}$ . Tales partículas pueden interactuar y dispersarse, y algunas se perderán tras el horizonte de sucesos (cuyo destino inevitable es la singularidad) y otras escaparan a  $\mathcal{I}^+$  (ver figura 7), y denotamos al espacio de Hilbert de los estados a tiempo infinito  $H_{\text{out}}$ , que será producto tensorial de los espacios de Hilbert de las partículas que escapan a  $\mathcal{I}^+$  y de las que caen a la singularidad.

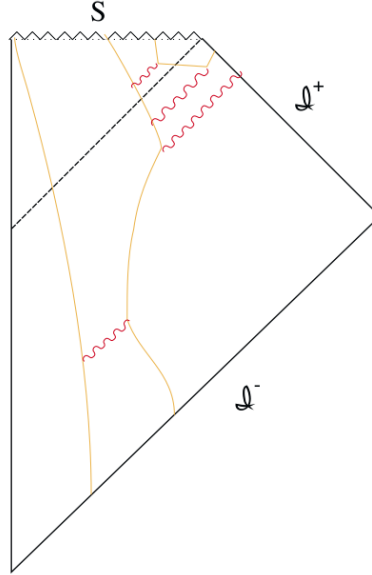


Figura 7: Diagrama de Penrose de partículas interactuando en un espacio tiempo de agujero negro. La hipersuperficie espacial que representa a la singularidad se denota por  $S$ .

Tendremos por tanto:

$$\begin{aligned} H_{\text{in}} &= H_{\mathcal{I}^-} \\ H_{\text{out}} &= H_{\mathcal{I}^+} \otimes H_S \end{aligned} \quad (4.2)$$

y la matriz  $S$  conecta los estados de  $H_{\text{in}}$  con los de  $H_{\text{out}}$ .

Pensemos ahora en la descripción que hará un observador en  $\mathcal{I}^+$ . Dado que no tienen acceso a  $S$ , las mediciones que hagan de las partículas que escapan serán a partir de la matriz densidad reducida

$$\rho_{\text{out}} = \text{Tr}_S \{ |\psi_{\text{out}}\rangle \langle \psi_{\text{out}}| \} \quad (4.3)$$

en la que se ha hecho una traza parcial sobre el espacio de Hilbert  $H_S$ . Luego aunque partamos de un estado puro, los observadores externos acabarán con un estado mixto, y la evolución unitaria no permite eso luego se ha perdido información. Por ejemplo, podemos pensar en dos partículas entrelazadas formando un estado puro que parten desde  $\mathcal{I}^-$ . Si una acaba en la singularidad y la otra escapa a  $\mathcal{I}^+$  el observador externo al trazar el estado puro pero entrelazado acabara con un estado mixto, perdiéndose información. A esta pérdida es a la que se refería Hawking.

Hawking pensaba que la pureza del estado no se restauraría aun con la evaporación de Hawking, en las que se emitirían partículas totalmente descorrelacionadas. La otra opción que se contemplaba era que la información sería devuelta al exterior cuando la evaporación estuviera en sus últimas etapas, y la singularidad quedase expuesta a la temperatura de Planck.

Pero como hemos visto, la máxima cantidad de información que puede contener un sistema es su entropía, que para un agujero negro es proporcional a su área. Como vimos, una vez que la evaporación avance hasta que el área sea menor que la mitad del área inicial, la información comenzará a ser emitida con la radiación. Tal análisis solo necesita que se respete la evolución unitaria, por lo que si la queremos conservar debe ocurrir tal cosa. Por tanto, la idea de que toda la información fuese devuelta al final también viola una ley de la naturaleza desde el punto de vista de un observador externo.

Otra propuesta ya comentada al final del apartado 1.3 fue la idea del remanente final; conteniendo toda la información y acabando el proceso de evaporación en tal punto. Respecto tales remanentes Susskind opina que serían tremendamente patológicos al tener una entropía casi infinita, y no considera necesario seguir avanzando en tal idea.

## 4.2. Complementariedad de los agujeros negros

La complementariedad de los agujeros negros es la propuesta de Susskind para solucionar la paradoja de la pérdida de información. En su forma más simple, se puede establecer como que ningún observador puede ser testigo de la violación de una ley de la naturaleza. Por tanto, podemos distinguir entre el observador externo e interno y razonar como sigue:

- Para el observador externo, un agujero negro es un sistema complejo cuya entropía es una medida de su capacidad para almacenar información. Nos dice que su área medida en áreas de Planck-Wheeler es una estimación del logaritmo del número de microestados a partir del cual se pudo formar el agujero negro, aunque no nos dice nada acerca de qué son esos micro-grados de libertad. Además, debe ocurrir que los micro-grados de libertad absorben información, la termalizan y la devuelven en forma de radiación de Hawking. Al medir, debe observar que en ningún momento la entropía de entrelazamiento excede la entropía del agujero negro. Finalmente, debe ocurrir que toda la información

sea devuelta con la radiación de Hawking, y no se detecte pérdida alguna.

- Para un observador en caída libre al agujero negro la complementariedad nos asegura que el principio de equivalencia debe ser respetado. Por tanto, mientras el agujero negro sea mucho mayor que la región ocupada por el observador, el horizonte de sucesos no tiene nada de especial localmente, pareciendo espacio-tiempo plano. Éste observador no encontrará radiación de Hawking, ni ninguna otra anomalía cerca del horizonte de sucesos.

De momento no tenemos ninguna contradicción, dado que el observador interno no puede comunicarse con el externo. Pero podríamos tener una contradicción bajo el supuesto siguiente:

Consideremos un agujero negro, como el que muestra el diagrama de Penrose de la figura 8, junto con un sistema en caída libre A. Tal sistema cruzará el horizonte de sucesos sin ningún incidente.

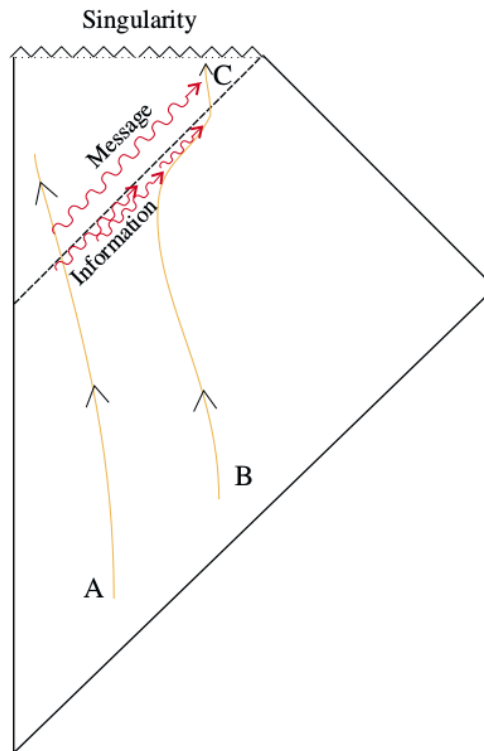


Figura 8: Diagrama de Penrose ejemplificando el intercambio de información de un observador externo.

Consideremos ahora un segundo observador B situado fuera del horizonte de sucesos, acelerando para evitar caer dentro. Los fotones que recoja, deben codificar la información portada por A. Supongamos que tras recolectar suficiente información de A, decide saltar al agujero negro. Tendremos por tanto ahora dos copias de la información original que portaba A dentro del agujero negro. Si ahora A decide mandar una señal al observador B, éste descubrirá dos copias de la información

violándose así el principio de no-clonación. Es decir, si este experimento es posible, la complementariedad de los agujeros negros no es consistente.

Pero es posible demostrar [11] que la complementariedad es consistente. Lo que ocurre es que B no podrá recuperar un sólo bit de A hasta que el agujero negro se ha evaporado a la mitad de su área inicial. Si para entonces B salta, se encuentra que para que A mande su información a B antes de que éste llegue a la singularidad, debe ocurrir que A portase una energía varias veces mayor que la masa del agujero negro, distorsionando así la geometría que propugnábamos fija y con ello el planteamiento del experimento.

Precisamente Susskind llamó complementariedad a su propuesta por la misma razón que en cuántica se usa que la visión corpuscular de la materia complementa a la ondulatoria y viceversa. Cualquier experimento en cuántica que trate de sondear distancias más pequeñas que una dada acabará por distorsionar el sistema que originalmente se pretendía medir por la dualidad onda corpúsculo. Por ejemplo, si tratamos de medir la posición de un electrón, necesitaremos enviar fotones cada vez más energéticos en aras de que sus longitudes de onda sean menores y nos permitan alcanzar mayor resolución de la posición del electrón. Pero tal aumento de energía hará que la incertidumbre en la posición del electrón crezca debido a la dispersión con el fotón.

Susskind, junto con colaboradores, idearon varios experimentos mentales para poner a prueba el principio de complementariedad de los agujeros negros [15], y en todos se llega a la conclusión lógica de que intentar comprobar si se viola lleva a distorsionar el sistema con el que se pretendía comprobar.

## 5. Conclusiones

En este trabajo nos hemos acercado a un problema actual de la física teórica, y es la supuesta pérdida de coherencia en la evolución de un agujero negro.

Hemos estudiado la termodinámica de agujeros negros y encontrado que es necesario asignar entropía a éstos. Como consecuencia, hemos visto que los agujeros negros radian con espectro de cuerpo negro, lo que nos ha llevado a la consideración de que la evolución unitaria podría no ser respetada en su evolución, pues estados puros serían radiados de vuelta como estados mixtos.

Bajo el supuesto de que las leyes de la física aplican sin modificaciones a la evaporación de un agujero negro, hemos estudiado la posible contribución que tendría la entropía de entrelazamiento a la entropía de un agujero negro, encontrando que también escala con el área. Además, estudiando bajo la entropía de entrelazamiento de un sistema compuesto en un estado puro, hemos concluido que la información no comienza a ser emitida hasta que su área decae por debajo de la mitad de su valor inicial, y que en cualquier caso la entropía del agujero negro es mayor en todo momento que la de entrelazamiento. Además, razonamos que en aras de respetar la unitariedad de la evolución la radiación remanente tras la evaporación del agujero negro debe estar correlacionada de manera sutil para contener la información original.

Finalmente, bajo la intención de hacer compatibles el principio de equivalencia, la conservación de la información y el teorema de no clonación de estados cuánticos, hemos visto la idea de Susskind y colaboradores de la complementariedad de agujeros negros, por la cual cualquier experimento que trate de encontrar una violación de cualquiera de ellos mediante la perturbación del sistema de medida.



## A. Relatividad general y agujeros negros

En este apéndice sintetizaremos los resultados de relatividad general que se mencionan en el trabajo, con el fin de hacerlo autocontenido. Usaremos unidades geométricas ( $G = c = 1$ ) que son las más usuales en la literatura de relatividad general..

Las ecuaciones de Einstein vienen dadas por la siguiente expresión:

$$G_{\mu\nu} = -\bar{\kappa}T_{\mu\nu} \quad (\text{A.1})$$

donde

- $G_{\mu\nu}$  es el tensor de Einstein, dado por  $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ ; con  $R_{\mu\nu}$  el tensor de Ricci y  $R = g_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$  su contracción, el escalar de Ricci.
- $T_{\mu\nu}$  es el tensor energía-momento, que codifica la información de las energías y momentos de la materia involucrada en el problema en cuestión.
- $\bar{\kappa}$  es una constante cuyo valor,  $8\pi G$  ( $G$  la constante gravitatoria de Newton), se fija exigiendo que la teoría contenga como límite la teoría de la gravitación newtoniana cuando la intensidad del campo gravitatorio es débil y las velocidades de las partículas involucradas son mucho menores que las de la luz.

Podemos reescribir (A.1) como:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -8\pi GT_{\mu\nu} \quad (\text{A.2})$$

El tensor de Einstein contiene la información acerca de la geometría del espaciotiempo, siendo función de la métrica y sus derivadas, mientras que el tensor de energía momento contiene la información acerca de aquello que altera la geometría del espaciotiempo. En palabras del propio Wheeler:

*“El espacio dice cómo se mueve la materia. La materia dice cómo se curva el espacio ”*

Solucionar las ecuaciones de Einstein equivale a encontrar una métrica que sea solución para un tensor de energía momento dado. Puesto que estamos interesados en las soluciones correspondientes a agujeros negros, el tensor energía momento es nulo y por tanto conviene reescribir las ecuaciones de Einstein para obtener las ecuaciones sin traza. Contrayendo ambos miembros de (A.2) con  $g^{\mu\nu}$ :

$$\underbrace{R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}}_R - \frac{1}{2}\underbrace{g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}}_{\delta^{\nu}_{\nu}=4}R = -\bar{\kappa}\underbrace{T_{\mu\nu}g^{\mu\nu}}_T$$

luego las ecuaciones de Einstein sin traza son

$$R_{\mu\nu} = -\bar{\kappa}(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T) \quad (\text{A.3})$$

De (A.3) se ve claramente que si el tensor energía-momento es nulo, solo debemos resolver  $R_{\mu\nu} = 0$ . Es facil ver que, dado que el tensor de Ricci es función de las derivadas de la métrica, que la métrica de Minkowski  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$  es trivialmente una solución. Pero la (aparentemente sencilla) ecuación anterior es lo suficientemente complicada como para admitir soluciones no triviales debido a su no-linealidad, tales como la métrica de Schwarzschild o las ondas gravitacionales.

Dado que la resolución de  $R_{\mu\nu} = 0$  nos aparta del objetivo principal de éste trabajo, veamos directamente dos soluciones que son de interés: la métrica de Schwarzschild; que describe un agujero negro esféricamente simétrico y estático, y la métrica de Kerr; que describe un agujero negro axisimétrico y estacionario (el cual rota)<sup>10</sup>

### A.1. Agujero negro de Schwarzschild

La solución de Schwarzschild es la solución a las ecuaciones de Einstein en el vacío no trivial más sencilla. Es una solución estática con simetría esférica (invariante bajo rotaciones del grupo  $SO(3)$ ), cuyo aspecto en las coordenadas de Schwarzschild  $(t, r, \theta, \varphi)$  es:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (\text{A.4})$$

A primera vista dos cosas pueden llamar nuestra atención. La primera es que para  $\theta = 0$ ,  $\theta = \pi$  se tiene que  $g_{\varphi\varphi} = 0$ . Pero dado que tenemos simetría bajo rotaciones, una rotación movería esta singularidad a otro punto donde previamente no la había, por lo que esta aparente singularidad es producto de las coordenadas elegidas, y no debe preocuparnos. La segunda cosa llamativa es que, para los valores  $r = 0$  y  $r = 2M$  se tiene que  $g_{tt}$  es singular y cero respectivamente, y  $g_{rr}$  cero y singular respectivamente. Usualmente una manera de saber si una singularidad es física o sólo de coordenadas es calcular invariantes de curvatura (funciones escalares formadas a traves de contracciones del tensor de Riemann). Para Schwarzschild, dado que  $R = 0$  y  $R_{\mu\nu} = 0$  por definición, necesitamos contraer el tensor de Riemann consigo mismo, obteniendo el invariante de Kretschmann:

$$R_{\mu\nu\rho\lambda}R^{\mu\nu\rho\lambda} = \frac{48M^2}{r^6}$$

Vemos que no es irregular en  $r = 2M$ , aunque sigue dándonos problemas en el punto  $r = 0$ . El punto  $r = 0$  es una singularidad física, mientras que el punto

<sup>10</sup>Por completitud, comentemos que las dos otras soluciones de agujeros negros más nombradas en la literatura son la de Reissner-Nordström (un agujero negro con las mismas características que el de Schwarzschild pero cargado) y la más general, la de Kerr-Newman (cargado y rotante).

$r = 2M$  es un artefacto de las coordenadas (estrictamente hablando, para afirmar que  $r = 2M$  es una singularidad de coordenadas es necesario encontrar un cambio de variable que la haga desaparecer, como haremos posteriormente).

Pese a que  $r = 2M$  sea una singularidad de coordenadas, posee significado físico, al contrario que las que nos molestaban en las variables angulares, aunque el hecho de que sean singulares en tal punto hará necesario buscar unas nuevas. Un hecho muy conocido es que la superficie definida por  $r = 2M$ , conocida como horizonte de sucesos<sup>11</sup>, es una superficie de corrimiento infinito hacia el rojo de los fotones emitidos desde ella. Por tanto, si sincronizamos dos relojes mediante la emisión de pulsos de luz, la dilatación del tiempo para un observador mientras se acerca a tal superficie diverge respecto a otro midiéndola desde el infinito (que es el tiempo  $t$  de las coordenadas de Schwarzschild).

Pero lo que nos interesa de cara a este trabajo es estudiar la estructura del cono de luz en un espacio descrito por esta métrica. Encontraremos que el horizonte de sucesos es una superficie de no retorno: una vez se cruza, ni siquiera la luz puede escapar. Para estudiar la estructura del cono de luz nos planteamos resolver la trayectoria descrita por un rayo de luz dirigido radialmente ( $d\theta = d\varphi = 0$ ) hacia el agujero negro. Dado que para partículas sin masa se tiene que  $ds = 0$ , de la métrica (A.4) obtenemos:

$$\left(\frac{dt}{dr}\right)^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-2}$$

cuya solución es  $t = \pm (r + 2M \log |r/2M - 1| + C_0)$ . La estructura de estos conos se muestra en la figura 9a.

Vemos que tras el horizonte de sucesos los conos invierten su dirección impidiendo la salida de materia (las trayectorias de partículas masivas están contenidas dentro del cono de luz) y de fotones. Pero como augurábamos, tal diagrama nos dice que así como nada puede salir tampoco puede entrar nada al agujero negro (la trayectoria de los fotones que caen radialmente es tangente al horizonte de sucesos). Esto es debido a que las coordenadas no son las correctas para describir esto<sup>12</sup>. Aun así nos han

<sup>11</sup>Y al punto  $r \equiv R = 2M$  se le conoce como radio de Schwarzschild, que sorprendentemente coincide con el radio al cual hay que compactificar una masa  $M$  para que la velocidad de escape en el sentido Newtoniano sea la de la luz. Tal cálculo procede de un desarrollo erróneo, pero da con el resultado correcto.

<sup>12</sup>De hecho, el tiempo propio  $\Delta\tau$  que un observador en caída libre mide que tarda en cruzar el horizonte de sucesos, e incluso en llegar a la singularidad, es finito y viene dado por (ver [16])

$$\Delta\tau = \frac{2}{3\sqrt{2M}} \left(r_0^{3/2} - r^{3/2}\right) \quad (\text{A.5})$$

donde  $r$  es la distancia actual y  $r_0$  desde la que partió.

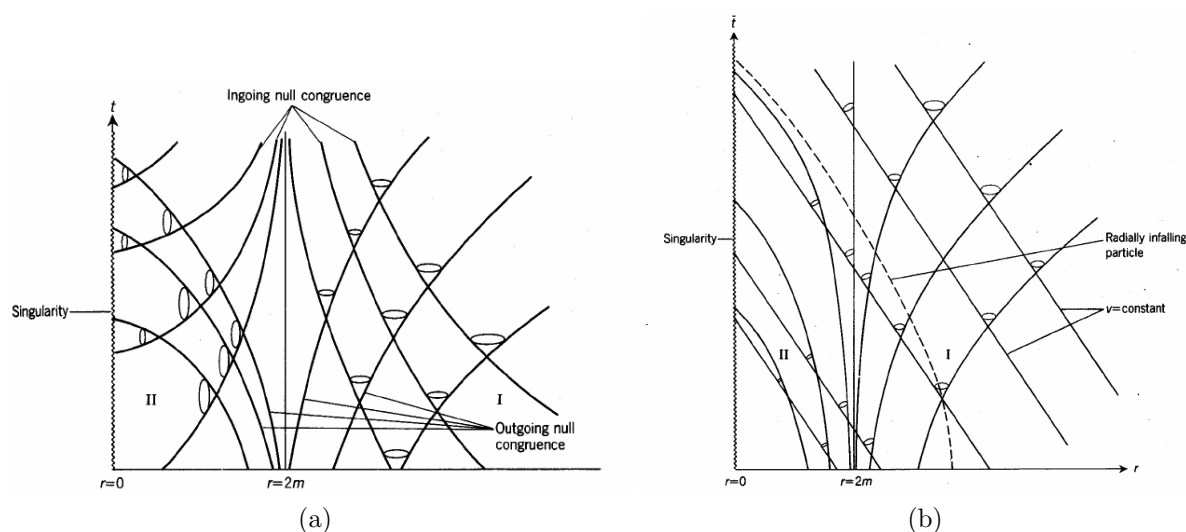


Figura 9: Geodésicas nulas en coordenadas de Schwarzschild (a) y de Eddington-Finkelstein (b). En coordenadas de Schwarzschild no se puede salir del agujero negro pero tampoco entrar. En coordenadas de Eddington-Finkelstein se ve claramente que es factible entrar pero no es posible salir.

dado una pista: el cambio<sup>13</sup>

$$t \mapsto \bar{t} = t + 2M \log \left| \frac{r}{2M} - 1 \right|$$

quizá consiga describir correctamente la estructura de los conos de luz cerca de  $r = 2M$ . En efecto, para geodésicas nulas radiales entrantes ahora se tiene que  $\bar{t} = -r + C_0$ , y para las salientes  $\bar{t} = r + 4M \log |r/2M - 1| + C_0$ . La estructura de los conos de luz resultantes se puede ver en la figura 9b.

Por tanto hemos comprobado que la solución de Schwarzschild dota al espacio tiempo de una estructura causal que implica que una vez se cruza el horizonte de sucesos no hay vuelta atrás; es una membrana unidireccional. Además, en el futuro causal de todas las partículas dentro del agujero negro está el punto  $r = 0$ , denominado singularidad pues la curvatura diverge. Es el futuro inevitable una vez se cruza el horizonte.

## A.2. Agujero negro de Kerr

Se puede demostrar que la solución de Schwarzschild es la única solución exterior (cuando el tensor energía momento es nulo) con simetría esférica resultando en un campo gravitatorio estático (teorema de Birkhoff). Por lo anterior, no puede

<sup>13</sup>Tales coordenadas se conocen como coordenadas de Eddington-Finkelstein *avanzadas*. El cambio  $t \mapsto \bar{t} = t - 2M \log |r/2M - 1|$  (coordenadas *retardadas*) produce el resultado opuesto: el horizonte de sucesos es una superficie que se puede cruzar de dentro hacia fuera, pero no al contrario. Tal objeto se conoce como agujero blanco.

describir fielmente objetos rotantes (con momento angular no nulo). Si relajamos tales condiciones, es posible demostrar que la métrica que describe objetos con momento angular es la de Kerr (siendo más exactos, describe un campo estacionario y axisimétrico). De hecho, la métrica de Kerr es la *única* solución estacionaria de las ecuaciones de Einstein en el vacío que es asintóticamente plana (tiende en el infinito a Minkowski) y posee un horizonte de eventos regular.

Tal métrica responde a la expresión (en coordenadas de Boyer-Lindquist  $(t, r, \theta, \varphi)$ ):

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right) dt^2 + \frac{4Mar \sin^2 \theta}{\Sigma} dt d\phi - \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 - \Sigma d\theta^2 - \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2 r \sin^2 \theta}{\Sigma}\right) \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (\text{A.6})$$

donde  $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$ ,  $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ . Pese a su complicado aspecto, las propiedades del agujero negro solo dependen de los parámetros  $a$  y  $M$ . El límite  $a = 0$  devuelve la métrica de Schwarzschild.

La ecuación (A.6) describe a un agujero negro rotante con momento angular  $J = aM$ . Las propiedades causales son parecidas a las de Schwarzschild (con la salvedad de que ahora tenemos dos horizontes de sucesos, ergosfera... Una discusión detallada de tales propiedades escapa al objetivo de este trabajo). En la figura 10 vemos la estructura de los conos de luz en este espaciotiempo.

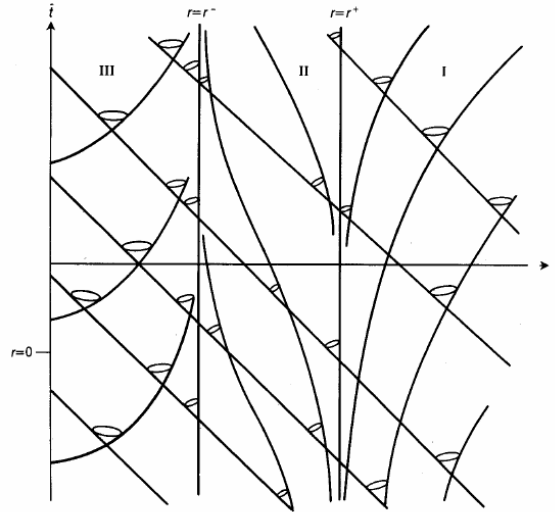


Figura 10: Geodésicas nulas en coordenadas de Boyer-Lindquist en un espaciotiempo de Kerr.

Para este apartado es interesante seguir extrayendo conclusiones de la métrica de Kerr. El horizonte de sucesos se define como la hipersuperficie a  $r = \text{cte}$  nula (las trayectorias de partículas no masivas están contenidas en ella). Tal condición equivale a:

$$g^{rr} = 0 \rightarrow r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}$$

(aquí vemos que  $a \leq M$ , lo que se conoce como la conjetura del censor cósmico de Penrose: no podemos observar una singularidad desnuda; debe estar oculta tras un horizonte de sucesos).

Calculemos el área del horizonte de sucesos:

$$A_H = \int_{r=r_+} d\theta d\varphi \sqrt{g_{\theta\theta} g_{\varphi\varphi}} = 4\pi(r_+^2 + a^2) = 8\pi M^2 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{J_H^2}{M^4}}\right) \quad (\text{A.7})$$

con  $J_H = aM$ . Fijémonos que recuperamos la expresión para el área del agujero negro de Schwarzschild si  $a = 0$  ( $A_H^S = 4\pi(2M)^2$ , pues es esféricamente simétrico).

Diferenciando (A.7) tomada como función de la masa y el momento angular:

$$dA(M, J_H) = \left(\frac{\partial A}{\partial M}\right) dM + \left(\frac{\partial A}{\partial J_H}\right) dJ_H \rightarrow \frac{1}{8\pi} dA_H = \frac{1}{\kappa} dM - \frac{\Omega_H}{\kappa} dJ_H \quad (\text{A.8})$$

donde

$$\kappa := \frac{\sqrt{M^2 - a^2}}{2Mr_+}, \quad \Omega_H = \frac{a}{2Mr_+}$$

La constante  $\kappa$  se conoce como *gravedad superficial*, y  $\Omega_H$  es la frecuencia angular a la que rota el horizonte de sucesos externo. Fijémonos que si suponemos la relación de Bekenstein (1.6), la analogía con la termodinámica nos lleva a que el agujero negro posee una temperatura  $T = \kappa/2\pi$ . Para Schwarzschild obtendríamos  $T = 1/8\pi M$ .

### A.3. Diagramas de Penrose

Por último, comentaremos en este apéndice brevemente los diagramas de Penrose ya que aparecen durante el trabajo.

Los diagramas de Penrose son una forma útil de representar la estructura causal de cualquier espaciotiempo. Representan la geometría de una superficie bidimensional de coordenadas angulares fijas. Más aun, la “compactifican” para que sea posible representar en un área infinita una superficie infinita. Como ejemplo, consideremos el espaciotiempo plano de Minkowski. Ignorando las coordenadas angulares, se tiene que

$$d\tau^2 = dt^2 - dr^2 = (dt + dr)(dt - dr)$$

Dado que para partículas no masivas  $d\tau = 0$ , los conos de luz satisfacen  $dt \pm dr = 0$ .

Cualquier transformación de la forma

$$\begin{aligned} Y^+ &= F(t + r) \\ Y^- &= F(t - r) \end{aligned}$$

preservará la forma de los conos de luz. La idea de Penrose fue utilizar una transformación que mapea un intervalo infinito en uno finito. Por ejemplo, la transformación

$$\begin{aligned} Y^+ &= \tanh(t + r) \\ Y^- &= \tanh(t - r) \end{aligned}$$

mapeará el espaciotiempo de Minkowski al triangulo finito acotado por

$$\begin{aligned} Y^+ &= 1 \\ Y^- &= -1 \\ Y^+ &= Y^- \end{aligned}$$

En la figura 11 se puede ver el diagrama de Penrose para el espaciotiempo de Minkowski, y representaciones de contornos para  $t = \text{cte}$  y  $r = \text{cte}$ .

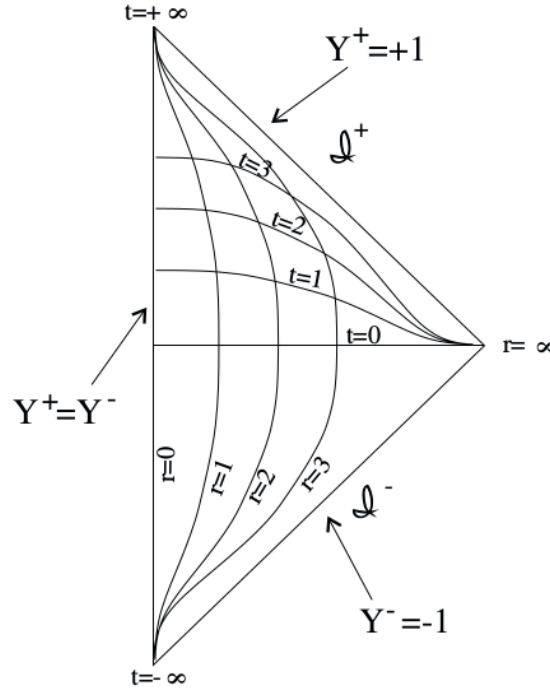


Figura 11: Diagrama de Penrose para el espaciotiempo de Minkowski.

En 11 tenemos varios infinitos. Los puntos  $t = \pm\infty$  representan el futuro/pasado de todas las trayectorias temporales, que por tanto parten de  $t = -\infty$  y acaban en  $t = \infty$ . El punto  $r = \infty$  es donde las superficies espaciales acaban.  $\mathcal{I}^+$  y  $\mathcal{I}^-$  representan el futuro y pasado infinito de los rayos de luz respectivamente, que parten de  $\mathcal{I}^-$  y acaban en  $\mathcal{I}^+$ .

Por último, veamos el aspecto de un diagrama de Penrose para la formación de un agujero negro por colapso de un sistema con simetría esférica de partículas no masivas (figuradiagrama-penrose-collapse).

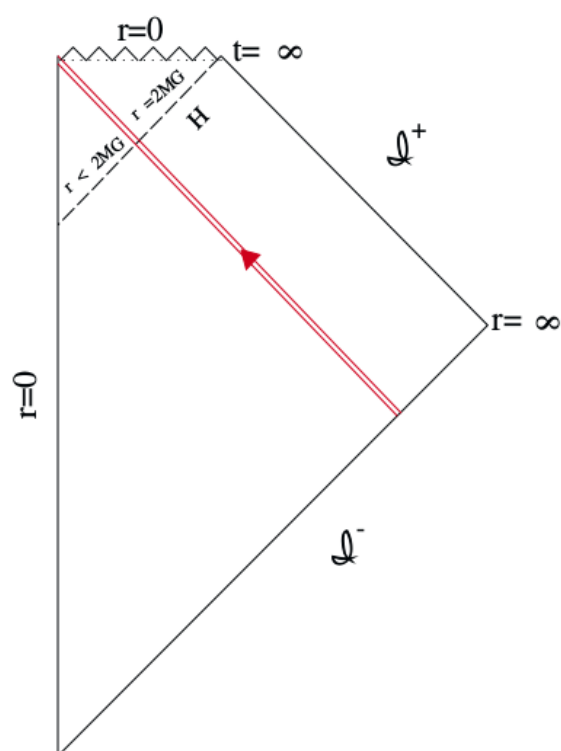


Figura 12: Diagrama de Penrose para la formación de un agujero negro.



## Referencias

- [1] J.D. Bekenstein, *Black holes and information theory*, Contemp. Phys., **45** pp.31-43 (2003); quant-ph/0311049
- [2] J. D. Bekenstein, *Black Holes and Entropy*, Phys. Rev. **D7** (1973) 2333.
- [3] S. Carroll . *Spacetime and Geometry. An introduction to general relativity*. Addison Wesley (San Francisco), 2004.
- [4] S. W. Hawking, *Gravitational Radiation from Colliding Black Holes*, Phys. Rev. Lett., **26** (1971) 1344
- [5] S. W. Hawking, *Particle creation by black holes*, Commun. Math. Phys., **43** (1975) 199-220
- [6] W. G. Unruh, "Notes on black-hole evaporation". Phys. Rev. D. **14** (1976) 870
- [7] S. W. Hawking, *Breakdown of predictability in gravitational collapse*, Phys. Rev. D, **14** (1976) 2460
- [8] M. Srednicki, *Entropy and Area*, Phys. Rev. Lett., **71**, 666 (1993); hep-th/9303048
- [9] J. D. Bekenstein, *Do we understand black hole entropy?*, arXiv: gr-qc/9409015v2 (1994).
- [10] L. Susskind, J. Uglum, *Black Hole Entropy in Canonical Quantum Gravity and Superstring Theory*, Phys. Rev. D, **50** 2700-2711 (1994); hep-th/9401070
- [11] L. Susskind, J. Lindesay . *An introduction to Black Holes, Information and the String Theory Revolution. The Holographic Universe*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2005.
- [12] L. Susskind, L. Thorlacius, J. Uglum, *The Stretched horizon and black hole complementarity*, Phys. Rev. D, **48** 37431 (1993); hep-th/9306069
- [13] D. N. Page, *Average entropy of a subsystem* Phys. Rev. Lett., **71**, 1291 (1993); gr-qc/9305007
- [14] D. N. Page, *Information in black hole radiation*, Phys. Rev. Lett., **71**, 3743-3746 (1993); hep-th/9306083
- [15] L. Susskind and L. Thorlacius, *Gedanken experiments involving black holes*, Phys. Rev. D **49**, 966 (1994) [hep-th/9308100]
- [16] R. d'Inverno, *Introducing Einstein's Relativity*. Oxford University Press, 1992.