Eduard Mas
Laura Masip
Jordi Pina

Relació de capacitats calorífiques d'un gas: mètode de la velocitat del so.

- Introducció.

  - Part tèorica [1].

    L'objectiu de la pràctica és la determinació de la relació de capacitats calorífiques ($\gamma = \frac{C_p}{C_v}$) de la mescla de gasos que constitueix l'aire.

    Per a obtenir el valor es mesura la velocitat del so mitjançant el mètode que s'exposa a continuació i es fa ús de l'equació $\gamma = \frac{Mv^2}{RT}$ que es deduirà en les properes pàgines.

    Per a mesurar la velocitat del so s'utilitza un fenomen físic anomenat ressonància.

    Per entendre aquest fenomen es considera una ona harmònica y_1 que es propaga d'esquerra a dreta i una altra ona y_2 amb les mateixes característiques però que es desplaça en sentit contrari, i. e.:

    $$y_1 = y_0 \cos(kx - \omega t) \tag{1}$$

    $$y_2 = y_0 \cos(kx + \omega t + \delta) \tag{2}$$

    Com que les ones del so són lineals (és a dir, $A \ll \lambda$) es pot aplicar el principi de superposició i sumar les dues ones:

    $$y = y_1 + y_2 = (2y_0 \cos\frac{\delta}{2}) \cos(kx - \omega t + \frac{\delta}{2}) \tag{3}$$

    On es pot identificar $A = 2y_0 \cos\frac{\delta}{2}$.

    És clar que A no és constant i que té un valor màxim igual a $2y_0$ quan $\cos\frac{\delta}{2} = 1$, és a dir, quan $\frac{\delta}{2} = n\pi$ o el què és el mateix, quan $\delta = 2n\pi$. Quan això succeeix es diu que la suma de les dues ones genera una interferència totalment constructiva que implica un augment del volum percebut.

    En la mesura de la velocitat del so s'empra un tub llarg amb aigua a una alçada variable L respecte a un diapasó, que és el que s'utilitza per a generar ones d'una freqüència coneguda. En aquestes condicions de ressonància amb un extrem lliure i un de fix es demostra que les interferències totalment constructives es produeixen en

$$L = \frac{n\lambda}{4} \tag{4}$$

per $n = 1, 3, 5....$

Demostració. Tenint en compte que es produeix una interferència totalment constructiva quan $\delta = 2n\pi$ i que $\delta_{total} = \delta_{fonts} + \delta_{reflexio} + \delta_{cami} = 0 + \pi + 2\pi\frac{2L}{\lambda}$ [1] on $n = 1, 2, 3$.
S'iguala el desfassament obtingut amb el desfassament necessari per obtenir una ITC ($\delta = 2n\pi$, com ja s'ha demostrat) i s'obté que:

$$L = \frac{n\lambda}{4} \tag{5}$$

Per $n = 1, 3, 5...$

□

Un cop mesurades les diverses longituds es té en compte que l'extrem obert del tub no és exactament un antinode, sinó que aquest es troba una mica més enllà de l'extrem. En tubs de parets primes i de secció transversal circular aquesta correcció d'extrem és del voltant de $0,6R$, on R és el radi del tub [3]. Per tant, la longitud efectiva del tub es calcula mitjançant l'equació empírica:

$$L_{ef} = L + 0,6R \tag{6}$$

A continuació es fa un gràfic "$L_{ef} vs. n/4$ï al ser $L = \lambda\frac{n}{4}$ és clar que el pendent de la recta ajustada és λ.
Utilitzant l'equació $v = \lambda\nu$ es troba la v i es compara amb l'expressió empírica per la velocitat del so

$$v_{aire} = 331,3\frac{m}{s}\sqrt{1 + \frac{T/°C}{273,15K}} \tag{7}$$

i se'n critica el resultat obtingut.

Finalment se substitueix v a l'equació $\gamma = \frac{Mv^2}{RT}$ que es dedueix com segueix:

Demostració. [2]
Es defineix el mòdul de compressibilitat adiabàtic B_{ad} com a

[1] Es demostra fàcilment que $\delta_{cami} = 2\pi\frac{\Delta x}{\lambda}$ i que la reflexió d'una ona en un extrem fix indueix un $\delta_{reflexio} = \pi$ però queda fora de l'abast d'aquesta introducció

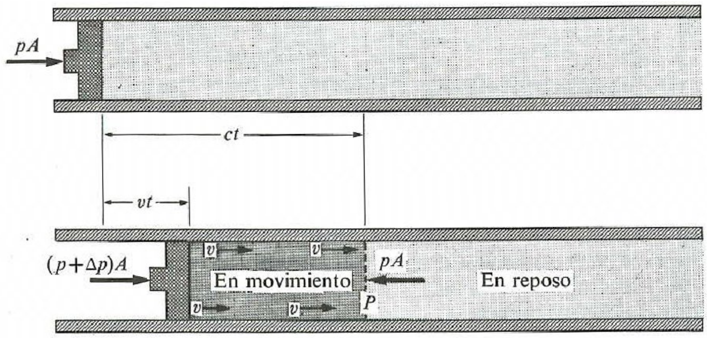

Figura 1: Propagació d'una perturbació longitudinal en un fluid tancat en un tub.

$$B_{ad} = -V \left(\frac{dp}{dV} \right)_{ad} \tag{8}$$

on p és la pressió i V és el volum. Per a petits increments s'aproxima a:

$$B_{ad} = -V \frac{\Delta P}{\Delta V} \tag{9}$$

La figura 1 representa un fluid de densitat ρ contingut en un tub de secció recta A i sotmès a una pressió p resultat d'empènyer el pistó. Com que la quantitat de fluid posat en moviment al cap d'un temps t és la que inicialment ocupava el volum de longitud ct i secció recta A. La massa d'aquest fluid és ρctA i la quantitat de moviment obtingut és

$$\overrightarrow{p} = \overrightarrow{m} \cdot \overrightarrow{v} = mv \cos \alpha = mv\rho ctAv \tag{10}$$

La disminució unitària de volum que ha patit el fluid és

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{Avt}{Act} \tag{11}$$

ja que se l'ha comprimit.
Se substitueix 10 i 11 a 9 i s'obté:

$$\Delta p = B\frac{v}{c} \tag{12}$$

Es calcula l'impuls com a

$$I = \int \overrightarrow{F} \cdot dt = F\Delta t = \Delta pAt = B\frac{v}{c}At \tag{13}$$

Aplicant el teorema de la quantitat de moviment, que postula que el vector impulsió de la força resultant que actua sobre una partícula és igual en magnitud, direcció i sentit al vector increment de la quantitat de moviment de la partícula

Demostració. $\overrightarrow{F} = m\frac{d\overrightarrow{v}}{dt}$
$\overrightarrow{F}dt = md\overrightarrow{v}$

$$\int_{t_1}^{t_2} \overrightarrow{F}dt = \int_{v_1}^{v_2} md\overrightarrow{v} \tag{14}$$

es defineix $I = \int_{t_1}^{t_2} \overrightarrow{F}dt$.

$$\int_{v_1}^{v_2} md\overrightarrow{v} = m\Delta\overrightarrow{v} \tag{15}$$

I substituint 15 a 14 és clar que $I = \int_{t_1}^{t_2} \overrightarrow{F}dt = m\Delta\overrightarrow{v}$.

□

es poden igualar les equacions 12 i 13 i obtenir:

$$B\frac{v}{c}At = \rho ctAv$$

I per tant

$$c = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \tag{16}$$

Per a obtenir un resultat més útil se substitueix B_{ad} per la B_{ad} que s'obté en un procés adiabàtic en un gas ideal.
En un gas ideal i en un procés adiabàtic es compleix que $pV^{\gamma} = ct$, si es prenen logaritmes s'obté $lnp + \gamma lnV = lnct$ que diferenciant esdevé $\frac{dp}{p} + \gamma\frac{dV}{V} = 0$ d'on s'obté $\left(\frac{dp}{dV}\right)_{ad} = -\gamma\frac{p}{V}$ que substituint a 8 fa esdevenir $B_{ad} = \gamma p$ que ara sí substituint a 16 dóna lloc a:

$$c = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} \tag{17}$$

Introduint l'equació dels gasos ideals a 17 s'obté

$$c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \tag{18}$$

O bé, més útil i anomenant un altre cop v a la velocitat del gas ara que ja no es pot confondre:

$$\gamma = \frac{Mv^2}{RT} \tag{19}$$

$\square$

Un cop obtingut γ mitjançant aquest mètode es compara amb el predit pel teorema de l'equipartició. En gasos ideals es compleix que $C_{v,m} = C_{v,m}^{TR} + C_{v,m}^{ROT} + C_{v,m}^{VIB} = \mathbb{N}\frac{1}{2}R$ on $\mathbb{N}$ és el nombre de termes quadràtics.

Considerant l'aire un gas ideal és clar que :

* $C_{v,m}^{TR} = \frac{3}{2}R$ ja que $\mathbb{N} = 3$ perquè té tres modes de translació.
* $C_{v,m}^{ROT} = R$ ja que és una molècula líneal i només té un mode de rotació.
* $C_{v,m}^{VIB} = 0$ ja que a baixes temperatures no contribueix el terme vibracional.

Sumant és clar que

$$C_{v,m} = \frac{5}{2}R \tag{20}$$

Tenint en compte que en gasos ideals es compleix que $C_{p,m} - C_{v,m} = R$ s'arriba a

$$C_{p,m} = \frac{7}{2}R \tag{21}$$

Calculant, $\gamma = \frac{C_{p,m}}{C_{v,m}} = \frac{7/2R}{5/2R} = \frac{14}{10} = 1,4$. Valor que es compararà amb l'obtingut experimentalment.

- Preguntes prèvies.
  * Per què es pot considerar la propagació del so com un procés adiabàtic?
    Perquè al ser la propagació del so un procés molt ràpid no hi ha prou temps per aconseguir que la calor flueixi des de les regions comprimides (major temperatura) fins a les expandides (menor temperatura). Abans que això passi la regió que estava comprimida passa a estar expandida i viceversa.
  * Per què puja el volum del so per a determinades longituds del tub?
    Perquè es produeix una interferència totalment constructiva.
    Quan l'ona emesa pel diapasó està en fase amb la reflectida per l'aigua es crea una ona resultant del doble d'amplitud de les ones interferides.

* La representació acostuma a produir una línia recta però l'ordenada no és exactament zero. Sabria dir per què?
  Perquè hi ha l'anomenat error d'extrem ja que tot i que el tub de vidre té una longitud L, l'extrem obert del tub no és exactament un antinode, sinó que aquest es troba una mica més enllà.
  Es corregeix parcialment aquest error fent us de l'equació empírica $L_{ef} = L + 0,6R$.
* Si es fes servir un diapasó de freqüència més baixa, què passaria amb les longituds del tub a les que s'observa ressonància?
  Si la freqüència del diapasó fos més baixa, com que la velocitat del so és la mateixa es veu a partir de $v = \lambda\nu$ que λ seria major.
  I a partir de l'equació $L = \frac{n}{4}\lambda$ és clar que L seria major.
* Com es produeixen les notes en els instruments musicals anomenats de vent?
  Els instruments de vent són bàsicament tubs oberts pels dos extrems en els quals es fa vibrar l'aire del seu interior.
  Així, tapant els diferents forats del tub s'augmenta la longitud de la columna d'aire, ja que l'aire surt fonamentalment pel primer forat obert.
  És per això que, igual que passa en el tub de vidre, la freqüència produïda ha de disminuir, causant així notes més greus.
* Defineixi ones transversals i longitudinals. De quin tipus són les del so?
  Una ona transversal és aquella en que les oscil·lacions es produeixen perpendiculars a la direcció de propagació. Ho són per exemple les ones de les cordes.
  En canvi, en una ona longitudinal, les oscil·lacions es produeixen paral·leles a la direcció de propagació. Ho són les ones sonores.
* Aquest experiment s'acostuma a fer amb aire. Si es fes servir heli, quina seria la longitud d'ona del so? I si es fes servir CO_2?
  Si es fes servir l'heli, com que $v_{prop} = 970\frac{m}{s}$ a $273\,K$ i $v = \lambda\nu$ s'obté que $\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{965}{2000} = 0,4825\,m$.
  Si es fes servir CO_2, com que $v_{prop} = 259\frac{m}{s}$ a $273\,K$ i $v = \lambda\nu$ s'obté que $\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{259}{2000} = 0,1295\,m$.

- Part experimental.
  - Material.
    S'utilitza un tub de vidre de secció transversal circular de diàmetre $3,4\,cm$ i de longitud $102\,cm$, un diapasó de $\nu = 2000\,Hz$, un embut d'addició , un tub de goma i aigua.
  - Procediment.

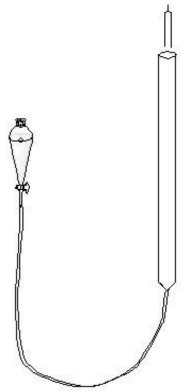

Figura 2: Esquema del muntatge.

Tal i com es mostra a l'esquema 2 la part inferior del tub de vidre s'uneix, mitjançant el tub de goma, a l'embut d'addició.

A continuació s'omple totalment el tub de vidre amb aigua.

Mitjançant el desplaçament de l'embut d'addició s'aconsegueix escollir el nivell d'aigua desitjat gràcies al principi de vasos comunicants.

Amb el muntatge preparat, es colpeja el diapasó per aconseguir l'emissió de so i es col·loca a la boca del tub.

Situant l'embut d'addició per sota del nivell de l'aigua del tub, s'aconsegueix que aquest nivell baixi.

Quan es detecta un augment en el volum del so emès pel diapasó es tanca la clau de l'embut d'addició, de manera que s'atura el desplaçament de l'aigua del tub.

Situant l'embut d'addició per sobre del nivell de l'aigua del tub, s'aconsegueix que aquest nivell pugi, de manera que es pot ajustar la longitud on es produeix la interferència totalment constructiva.

Aquest procediment es repeteix per a les diferents longituds on es troben ITCs diverses vegades fins a aconseguir una exactitud acceptable.

Les mesures s'han pres a una temperatura de $15°C$.

- Resultats i discussió.

  Es fa una taula de punts amb la L_{ef} calculada mitjançant l'equació 6 i les diverses $n/4$ i es representa gràficament.

  S'observa que tot i que hi ha una mica de dispersió s'hi ajusta una recta correctament, la qual s'ajusta mitjançant el mètode dels mínims quadrats donant com a resultat la recta $y = 0,1720x - 0,00395$.

  Com ja s'ha exposat en la introducció el pendent d'aquesta recta és λ, és a dir, $\lambda = 0,1720\, m$.

$n/4$	L	L_{ef}
0,25	0,030	0,040
0,75	0,111	0,121
1,25	0,199	0,209
1,75	0,284	0,294
2,25	0,369	0,379

Taula 1: Mesures experimentals

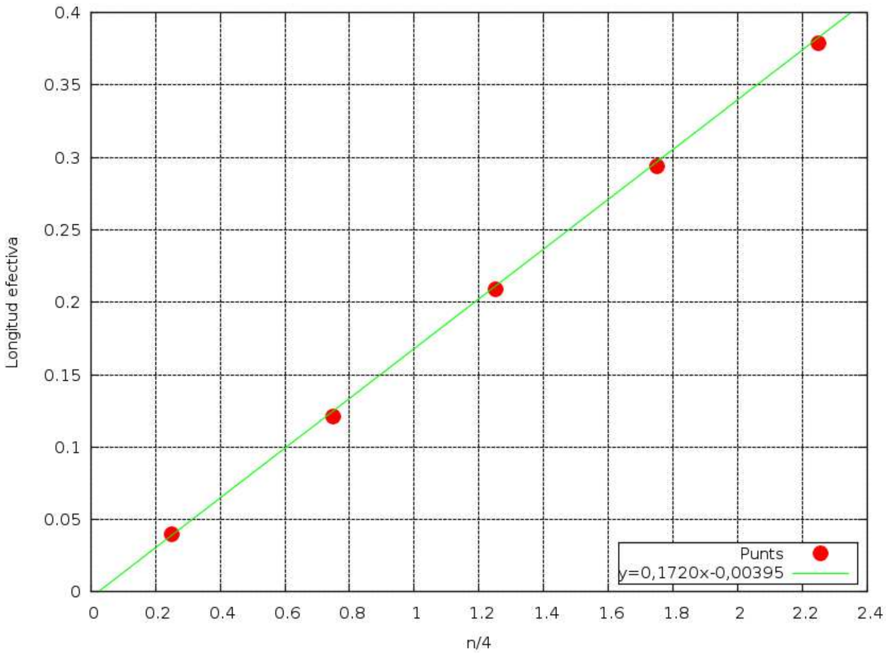

Figura 3: Diagrama L_{ef} vs $n/4$

Utilitzant l'equació $v = \lambda\nu$ és clar que $v = 0,1720 \cdot 2000 = 344\, m/s$.

Es comprova la correspondència de la nostra mesura amb la predita per l'equació empírica 7 que tenint en compte que es van prendre les mesures a $15°C$ porta a $v_{aire} = 331,3\frac{m}{s}\sqrt{1 + \frac{T/°C}{273,15}} = 340,27\frac{m}{s}$, valor proper al mesurat experimentalment.

Fet això ja es pot trobar γ fent ús de l'equació que s'ha demostrat a la introducció:

$$\gamma = \frac{Mv^2}{RT} = \frac{0,02881 \cdot 344^2}{8,3145 \cdot 288} = 1,42 \quad (22)$$

On s'ha determinat M considerant que l'aire és una mescla N_2 i O_2 de proporcions 80% i 20% respectivament:

$$M_{aire} = \left(\frac{80}{100} \cdot 28,0134 \frac{g}{mol} + \frac{20}{100} \cdot 31,9988 \frac{g}{mol}\right) \frac{1\,kg}{1000\,g} = 0,02881 \frac{kg}{mol} \quad (23)$$

Comparant ara el resultat obtingut experimentalment de $\gamma = 1,42$ amb l'obtingut mitjançant el teorema de l'equipartició exposat a la introducció de $\gamma = 1,40$ es veu una clara correlació.

D'altra banda, substituint la velocitat del so obtinguda mitjançant l'equació empírica 7 a l'equació 19 s'obté:

$$\gamma = \frac{Mv^2}{RT} = \frac{0,02881 \cdot 340,27^2}{8,3145 \cdot 288} = 1,39 \quad (24)$$

Aquest també és molt proper a l'obtingut experimentalment.

Per a una millor comparació dels resultats obtinguts es realitza la taula:

Experimental	Teorema de l'equipartició	Utilitzant l'equació 7 per calcular v
1,42	1,4	1,39

Taula 2: Mesures experimentals

S'observa que el valor obtingut experimentalment és lleugerament superior als altres, la qual cosa no significa que sigui erròniament superior, ja que el teorema de l'equipartició suposa que l'aire és ideal i l'equació 7 és un model aproximat per obtenir v i substituir-la a l'equació 19.

- Conclusions.

  Es conclou experimentalment que $\gamma = 1,42$.

Referències

[1] Joseph W. Nibler David P. Shoemaker, Carl W. Garland. *Experiments in physical chemistry.* McGraw Hill, 1996.

[2] F.W. Sears i M. W. Zemansky. *Física.* Aguilar, 1971.

[3] J. W. Jewett R. A. Serway. *Física.* Thomson, 2004.