1. Funciones de Legendre

Gráficas de los primeros polinomios de Laguerre se pueden encontrar en las siguientes URLs:

- http://www.sali.freeservers.com/images/engg/legendre.gif
- http://www.efunda.com/math/legendre/images/LegendrePPlot.gif

1.1. Ecuación diferencial

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0 \tag{1}$$

1.2. Ecuación diferencial (forma de Sturm-Liouville)

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\frac{dy}{dx}\right] + n(n+1)y = 0 \tag{2}$$

1.3. Fórmula de Rodrigues

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \tag{3}$$

1.4. Función generatriz

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n \tag{4}$$

1.5. Fórmula de recursividad

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x) \tag{5}$$

1.6. Ortogonalidad

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{mn} \tag{6}$$

2. Funciones de Legendre asociadas

2.1. Ecuación diferencial

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right] y = 0 \tag{7}$$

2.2. Ecuación diferencial (forma de Sturm-Liouville)

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\frac{dy}{dx}\right] + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right] y = 0 \tag{8}$$

2.3. Fórmula de Rodrigues

$$P_n^m(x) = \frac{(1-x^2)^{m/2}}{2^n n!}\frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}}(x^2-1)^n \tag{9}$$

2.4. Función generatriz

$$\frac{(2m)!\,(1-x^2)^{m/2}\,t^m}{2^m\,m!\,(1-2tx+t^2)^{m+1/2}} = \sum_{n=m}^{\infty} P_n^m(x)\,t^n \tag{10}$$

2.5. Fórmula de recursividad

$$(n-m)P_n^m(x) = x(2n-1)P_{n-1}^m(x) - (n+m-1)P_{n-2}^m(x) \tag{11}$$

2.6. Ortogonalidad

$$\int_{-1}^{1} P_n^m(x)P_{n'}^{m'}(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\delta_{nn'} \tag{12}$$

3. Funciones de Laguerre

Gráficas de los primeros polinomios de Laguerre se pueden encontrar en las siguientes URLs:

- http://mathworld.wolfram.com/l1img409.gif
- http://www.aero.ufl.edu/\~{}uhk/laguer.jpg

3.1. Ecuación diferencial

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + (1-x)\frac{dy}{dx} + ny = 0 \tag{13}$$

3.2. Ecuación diferencial (forma de Sturm-Liouville)

$$\frac{d}{dx}\left[\left(xe^{-x}\right)\frac{dy}{dx}\right] + ne^{-x}y = 0 \tag{14}$$

3.3. Fórmula de Rodrigues

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}) \tag{15}$$

3.4. Función generatriz

$$\frac{e^{-\frac{xt}{1-t}}}{(1-t)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_n(x)}{n!}t^n \tag{16}$$

3.5. Fórmula de recursividad

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - n^2 L_{n-1}(x) \tag{17}$$

3.6. Ortogonalidad

$$\int_0^{\infty} L_m(x)L_n(x)e^{-x}\,dx = \delta_{mn} \tag{18}$$

4. Funciones de Laguerre asociadas

4.1. Ecuación diferencial

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + (k+1-x)\frac{dy}{dx} + ny = 0 \tag{19}$$

4.2. Ecuación diferencial (forma de Sturm-Liouville)

$$\frac{d}{dx}\left[\left(x^{k+1}e^{-x}\right)\frac{dy}{dx}\right] + ne^{-x}x^k y = 0 \tag{20}$$

4.3. Fórmula de Rodrigues

$$L_n^k(x) = \frac{e^x x^{-k}}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^{n+k}e^{-x}) \tag{21}$$

4.4. Función generatriz

$$(-1)^k\, t^k \frac{e^{-\frac{xt}{1-t}}}{(1-t)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_n^k(x)}{n!}t^n \tag{22}$$

4.5. Fórmula de recursividad

$$\frac{n-k+1}{n+1}L_{n+1}^k(x) + \Big(x+m-2n-1\Big)L_n^m(x) + n^2 L_{n-1}^m(x) = 0 \tag{23}$$

4.6. Ortogonalidad

$$\int_0^\infty L_m(x)L_n(x)e^{-x}x^k\,dx = \frac{(n+k)!}{n!}\delta_{mn} \tag{24}$$

5. Funciones de Bessel

Gráficas de los primeros polinomios de Bessel se pueden encontrar en las siguientes URLs:

- `http://mathworld.wolfram.com/bimg1295.gif`
- `http://www.efunda.com/math/bessel/images/BesselJPlot.gif`
- `http://www.physics.csbsju.edu/QM/i/bessel.J\_m.plot.a.gif`

5.1. Ecuación diferencial

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2)y = 0 \tag{25}$$

5.2. Ecuación diferencial (forma de Sturm-Liouville)

$$\frac{d}{dx}\left[(x)\,\frac{dy}{dx}\right] + \left(x - \frac{n^2}{x}\right)y = 0 \tag{26}$$

5.3. Fórmula de Rodrigues

$$J_n(x) = \sum_{p=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2p+n}}{p!(n+p)!} \tag{27}$$

5.4. Función generatriz

$$e^{x(t-1/t)/2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n \tag{28}$$

5.5. Fórmula de recursividad

$$J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x}J_n(x) - J_{n-1}(x) \tag{29}$$

5.6. Ortogonalidad

$$\int_0^1 dx\, x J_n(\lambda_1 x)\, J_n(\lambda_2 x) \quad , \text{ donde } J_n(\lambda_i) = 0 \ , \ \lambda_1 \neq \lambda_2 \tag{30}$$

6. Funciones de Hermite

Gráficas de los primeros polinomios de Hermite se pueden encontrar en las siguientes URLs:

- `http://mathworld.wolfram.com/himg2089.gif`
- `http://www.efunda.com/math/Hermite/images/HermiteHPlot.gif`

6.1. Ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2ny = 0 \tag{31}$$

6.2. Ecuación diferencial (forma de Sturm-Liouville)

$$\frac{d}{dx}\left[\left(e^{-x^2}\right)\frac{dy}{dx}\right] + 2ne^{-x^2}y = 0 \tag{32}$$

6.3. Fórmula de Rodrigues

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2} \tag{33}$$

6.4. Función generatriz

$$e^{2tx-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}t^n \tag{34}$$

6.5. Fórmula de recursividad

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \tag{35}$$

6.6. Ortogonalidad

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)H_n(x)e^{-x^2}\,dx = 2^n n!\sqrt{\pi}\delta_{mn} \tag{36}$$

7. Polinomios de Chebyshev

Gráficas de los primeros polinomios de Chebyshev se pueden encontrar en las siguientes URLs:

- http://mathworld.wolfram.com/c1img2363.gif
- http://www.efunda.com/math/Chebyshev/images/ChebyshevTPlot.gif
- http://www.ms.uky.edu/~larry/images/graph.gif

7.1. Ecuación diferencial

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + n^2y = 0 \tag{37}$$

7.2. Ecuación diferencial (forma de Sturm-Liouville)

$$\frac{d}{dx}\left[\left(\sqrt{1-x^2}\right)\frac{dy}{dx}\right] + \frac{n^2}{\sqrt{1-x^2}}y = 0 \tag{38}$$

7.3. Fórmula de Rodrigues

$$T_n(x) = \frac{(-1)^n\sqrt{1-x^2}}{(2n-1)(2n-3)\cdots 1}\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} \tag{39}$$

7.4. Función generatriz

$$\frac{1-tx}{1-2tx+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)t^n \tag{40}$$

7.5. Fórmula de recursividad

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \tag{41}$$

7.6. Ortogonalidad

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}T_m(x)T_n(x)\,dx = \begin{cases} \pi & m=n=0 \\ \frac{\pi}{2}\delta_{mn} & m=n=N\in\mathbb{N} \end{cases} \tag{42}$$