Mecànica Teòrica

Manel Bosch Aguilera

1 Introducció

- La mecànica de Newton estudia el moviment (evolució dinàmica) d'un sistema de partícules.
- Considera: espai tridimensional euclidi (homogeni i isòtrop) i temps absolut (homogeni).
- Sistema de referència inercial (SRI): aquell en què és vàlida la primera Llei de Newton.
- Principi de relativitat de Galileu: Les lleis de la física són iguals en qualsevol SRI.
- El grup de transformacions de galileu conté:
  i. Translacions de l'origen del sistema de referència: perquè l'espai és homogeni.
  ii. Rotació dels eixos: perquè l'espai és isòtrop.
  iii. Translació de l'origen de temps: perquè el temps és homogeni.
  iv. Translació de l'origen a velocitat constant.

  $$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathcal{G}\mathbf{r} + \mathbf{V}t + \mathbf{p} \\ t' &= t + s \end{aligned}$$

  on $\mathcal{G}$ és una matriu de rotació, $\mathbf{p}$ una translació i s una constant.
- **Principi de determinació de Newton:** L'evolució dinàmica d'un sistema depèn únicament de les posicions i velocitats de les partícules en un instant donat.
- Lleis de Newton:
  0. La massa m del cos és constant.
  1. Un cos no sotmés a forces roman en repòs o es mou a velocitat $\mathbf{v}$ constant.
  2. $\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}$, on $\mathbf{F}$ és la força aplicada i $\mathbf{p}$ el moment lineal: $\mathbf{p} \equiv m\mathbf{v}$.
  3. $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$
- *Llei feble d'acció-reacció*: Si (3.) es verifica sense cap tipus de restricció es conserva el moment lineal del sistema.

- *Llei forta d'acció-reacció*: Si (3.) es verifica i les forces estan orientades amb el vector que uneix les dues partícules es conserva el moment lineal i el moment angular del sistema.

- Un sistema de referència no inercial és aquell en què no se satisfà (1.). Sigui $\mathbf{a}_i$ l'acceleració produida sobre una partícula de massa m a l'aplicar-li una força $\mathbf{F}$ i sigui $\mathbf{a}_0$ l'acceleració del sistema de referència no inercial respecte de l'inercial. Aleshores, l'acceleració $\mathbf{a}$ a què es veu sotmesa la partícula des del SRNI satisfà la relació:
$$\mathbf{a}_i = \mathbf{a} + \mathbf{a}_0,$$
i, per tant, l'acceleració mesurada $\mathbf{a}$ ja no és proporcional a la força aplicada:
$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_i = m(\mathbf{a} + \mathbf{a}_0).$$
No obstant, si introduim una força fictícia (força d'inèrcia) definida com $\mathbf{F}_0 = -m\mathbf{a}_0$, aleshores
$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} - \mathbf{F}_0 \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{F} + \mathbf{F}_0 = m\mathbf{a},$$
i l'acceleració torna a ser proporcional a la suma de forces que actua.

- Límits de la Mecànica Newtoniana:
  i. Quan $\frac{v}{c} \approx 1$ estem en el règim de la relativitat especial i el temps deixa de ser absolut.
  ii. Quan treballem amb camps gravitatoris molt intensos tals que $\frac{\phi}{c^2} \approx 1$, som al règim de la relativitat general i l'espai deixa de ser euclidi.
  iii. Quan $\frac{Et}{h} \approx 1$ som al règim de la mecànica quàntica i el concepte de partícula deixa de ser vàlid.

- A més, quan treballem en sistemes caòtics (no satisfan el principi de determinació) o apareixen lligadures (en general, quan no en tenim, hem de treballar amb $3N$ equacions) els problemes són molt complicats de resoldre.

- Les **lligadures** són limitacions al moviment d'un sistema d'N partícules. Són holònomes si les podem expressar com $f(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n; t) = 0$. Ens permeten expressar una coordenada en funció de les altres: $x_1 = g(y_1, z_1, \ldots, \mathbf{r}_n; t)$.

- Les coordenades cartesianes deixen de ser independents quan introduim lligadures. En conseqüència, necessitem un sistema de coordenades que siguin independents a l'introduir lligadures.

- En un sistema d'N partícules tenim $3N$ graus de llibertat ($\equiv$ coordenades). Si introduim k lligadures holònomes, passarem a tenir $3N - k$ graus de llibertat. Aleshores, definirem un conjunt de $3N - k$ coordenades, les **coordenades generalitzades**, $\{q_i\}$ independents que descriguin el sistema i esiguin relacionades amb les cartesianes segons $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, \ldots, q_{3N-k}; t)$, per a $i = 1, \ldots, N$.

- La relació anterior ens passa d'un espai euclidi a un que no ho és, l'**espai de configuració**. En aquest es descriu perfectament l'evolució de la partícula. Serà un espai de $3N - k$ dimensions però tan sols tindrem una trajectòria.

2 Principis variacionals

Principi de Hamilton

- L'acció I d'un sistema (té unitats d'energia · temps) és una integral de camí en l'espai de configuració:

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i; t)\mathrm{d}t$$

- El **principi de Hamilton** ens diu que l'evolució d'un sistema en l'espai de configuració és tal que l'acció I té un valor estacionari.

- Això implica que si calculem I per a un camí considerat i té un valor estacionari, el valor d'I no variarà al llarg de camins veins que difereixen del primer infinitessimalment. Matemàticament això implica que $\delta I = 0$ a primer ordre, on

$$\delta I = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\lambda}\Delta\lambda + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}\lambda^2}(\Delta\lambda)^2 + \dots$$

- Per trobar una solució a aquest problema considerem el cas general (tot i que unidimensional) en què tenim una funció $f = f(y, \dot{y}; x)$, amb $\dot{y} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, sent y una coordenada i x un paràmetre, de tal forma que $y(x)$ és una trajectoria. Aleshores, volem trobar una trajectòria $y(x)$ tal que $\delta \int_{x_1}^{x_2} f(y, \dot{y}; x)\mathrm{d}x = 0$.

- Anomenem $y(x)$ al camí original que satisfà $\delta I = 0$ aleshores, si creem una familia de camins veïns $y(x, \alpha)$, el camí original serà $y(x, 0)$ i els camins variats els definim com el camí original $y(x, 0)$ més el producte d'una constant infinitessimal α per una funció arbitrària $\eta(x)$ que ha de satisfer:

  i. Ser contínua fins a $\ddot{\eta}(x)$.
  ii. Anul·lar-se als extrems del camí x_1 i x_2 de tal forma que en aquests punts els camins veïns coincideixin amb la camí original. És a dir $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$.

  Per tant, la família de camins serà:

$$y(x, \alpha) = y(x, 0) + \alpha\eta(x)$$

- Si definim $\delta y \equiv \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\alpha}\right)_0 \mathrm{d}\alpha$ (fent $\alpha = 0$ recuperem el camí original) com les infinitessimals variacions en el camí original al variar α per a x fixat, la condició de valor estacionari serà:

$$\delta I = \left(\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\alpha}\right)_0 \mathrm{d}\alpha = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\int_{x_1}^{x_2} \left[f\left(y(x, \alpha), \dot{y}(x, \alpha); t\right) \mathrm{d}\alpha\right]_0 \mathrm{d}x = 0$$

- Si fem la derivada i treballem la integral, arribem a la següent expresió

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right)\delta y\right]_0 \mathrm{d}x = 0.$$

- El teorema fonamental del càlcul variacional ens diu que si $\int_{x_1}^{x_2} M(x)\eta(x)\mathrm{d}x = 0$ per a qualsevol $\eta(x)$ que satisfaci les condicions abans esmentades, aleshores $M(x) = 0$ per a qualssevol (x_1, x_2). En conseqüència, com que $\delta y = \eta(x)$ (només cal fer la derivada i fer $\alpha = 0$), cal que

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = 0 \qquad\qquad x \in (x_1, x_2)$$

- Si generalitzem el problema a N coordenades (fent un raonament molt similar a l'anterior i tenint en compte que les coordenades són independents) obtenim unes equacions anàloges a les equacions anteriors (anomenades equacions d'Euler) però intercanviant y per y_i, ja que són vàlides per a totes les coordenades independents. Si particularitzem el problema al cas de la mecànica, $f(y_i, \dot{y}_i, x) = L(q_i, \dot{q}_i, t)$, i d'aquí resulten les **Equacions de Lagrange**:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0}$$

- Una manera de definir el Lagrangià és

$$\boxed{L = T - V}$$

però no és l'única, un lagrangia de l'estil $L' = L + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(q_i; t)$, també satisfà $\delta I = 0$.

- Les equacions de Lagrange són invariants sota canvis de coordenades generalitzades.

Teoremes de conservació

- Tant les Eq. de Newton com les de Lagrange, involucren sistemes amb N equacions diferencials de segon ordre en el temps que moltes vegades són complicades de resoldre. No obstant, sovint una primera integració és possible, i d'aquesta en podem treure informació suficient com per a conèixer el moviment qualitatiu del sistema.

- El **moment conjugat** o **canònic** es defineix com

$$\boxed{p_j \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}}$$

- Una coordenada és **cíclica** o **ignorable** si no apareix explícitament en el Lagrangià.

- Si q_j és cíclica, és a dir $\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$, de les equacions de Lagrange tenim que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) = \dot{p}_j = 0$, per tant: p_j es conserva.

- Definim la **força generalitzada** com

$$Q_j \equiv \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

l'última igualtat es pot demostrar fent que $\mathbf{F} = -\boldsymbol{\nabla} V(\mathbf{r}_i)$ i usant el fet que existeix una relació entre coordenades cartesianes i generalitzades. Mentre que Q_j no cal que tingui unitats de força, cal que $Q_j \cdot \delta q_j$ tingui unitats de treball.

- Una relació útil que també es pot obtenir de la relació entre coordenades cartesianes i generalitzades:

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}$$

<u>Conservació del moment lineal</u> [Espai homogeni]

- Si tenim un sistema de partícules en el qual tenim una coordenada q_j la variació $\mathrm{d}q_j$ de la qual representa una translació del sistema:

  i. L'energia cinètica ha de ser independent de l'origen de coordenades (les velocitats no poden dependre d'una translació en l'origen):

  $$\frac{\partial T}{\partial q_j} = 0$$

  ii. Considerem sistemes en què $V = V(q_i, t)$

- Les equacions de Lagrange es redueixen a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) + \frac{\partial V}{\partial q_j} = 0$$

En conseqüència, en base a les definicions fetes anteriorment: $p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$ i $Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$, tenim que

$$\dot{p}_j = Q_j.$$

- De forma que, si $Q_j = 0$ el moment p_j es conserva. Ens cal demostrar que (a): Q_j és una força (en concret, la component de la força en la direcció $\hat{\mathbf{n}}$ en què té lloc la translació de q_j) i que (b): p_j és la component del moment lineal en aquesta direcció. Com que $Q_j = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}$, ens cal evaluar el segon terme del producte escalar: la derivada.

$$\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \lim_{\mathrm{d}q_j \to 0} \frac{\mathbf{r}_i(\ldots, q_j + \mathrm{d}q_j, \ldots) - \mathbf{r}_i(\ldots, q_j, \ldots)}{\mathrm{d}q_j},$$

El terme del numerador $\mathbf{r}_i(q_j + \mathrm{d}q_j) - \mathbf{r}_i(q_j)$ correspon, precisament, al canvi de posició d'un vector sota una translació del sistema, és a dir: $\mathrm{d}q_j \cdot \hat{n}$. Aleshores

$$\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \lim_{\mathrm{d}q_j \to 0} \frac{\mathrm{d}q_j \cdot \hat{\mathbf{n}}}{\mathrm{d}q_j} = \hat{\mathbf{n}}$$

- Per tant:

(a). $Q_j = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \cdot \hat{\mathbf{n}} = \left(\sum_{n=1}^{N} \mathbf{F}_i\right) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad \checkmark$

$$\text{(b).}\ \ p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_i \right) \cdot \hat{\mathbf{n}}$$

$$p_j = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad \checkmark$$

- En conseqüència, si q_j (coordenada de translació) és cíclica, per tant $Q_j = 0$ i el moment lineal es conserva.

<u>Conservació del moment angular</u> [Espai isòtrop]

- Si ara q_j és una coordenada tal que dq_j representa una rotació, tenint en compte que T no pot dependre de l'orientació dels eixos (i, per tant, no depén de q_j) i si $V = V(q_i; t)$, i fent un raonament similar a l'anterior obtenim que:

$$\dot{p}_j = Q_j$$

- Ara hem de demostrar que (a): Q_j és la component del moment de força en la direcció de l'eix de rotació $\hat{\mathbf{n}}$ i (b): que p_j és el moment angular en la mateixa direcció.
- Hem de calcular el mateix límit que en la conservació del moment lineal. En aquest cas, al ser dq_j una rotació, tenim que

$$\left| \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right| = |\mathbf{r}_i| \sin\theta = |\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r}_i|$$

- De nou, si fem el mateix procediment que en el cas anterior, veiem que:

  (a). $Q_j = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{N} \quad \checkmark$

  (b). $p_j = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{L} \quad \checkmark$

- I, per tant, veiem que si q_j és ignorable, $Q_j = 0$ i p_j es conserva.

<u>Conservació de l'energia</u> [Temps homogeni]

- Derivant el lagrangià $L = L(q_i(t), \dot{q}_i(t); t)$ respecte el temps, arribem a

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \sum_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t},$$

  en conseqüència:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\sum_i \left[\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \right] \right) = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

- Definim la **funció energia** (que no ha de coincidir amb l'energia) com:

$$\boxed{h(q_i, \dot{q}_i; t) \equiv \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L}$$

  i, com que $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$ podem veure que es conserva si L (i, per tant, h) no depèn del temps.

- Si $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_i;t)$, podem escriure l'energia cinètica com:

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(\sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right)^2 .$$

I en coordenades generalitzades:

$$T = M_0 + \sum_j M_j \dot{q}_j + \sum_{jk} M_{jk} q_j q_k = T_0 + T_1 + T_2$$

on

$$M_0 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right)^2 \qquad M_j = \sum_i m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \qquad M_{jk} = \sum_i m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k}$$

- Veiem que T_0 és funció de les coord. generalitzades (únicament), que $T_1 = T_1(q_i, \dot{q}_i)$ és lineal per a les velocitats generalitzades i que $T_2 = T_2(q_i, \dot{q}_i)$ és quadràtica per a les velocitats generalitzades.

- Si $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_j)$, és a dir, no depenen del temps, $\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} = 0$ i $M_0 = M_1 = 0$, en conseqüencia

$$T = T_2$$

- *Definició*: una funció $f(x_1, \ldots, x_n)$ és homogènia de grau μ si $f(\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n) = \alpha^\mu f(x_1, \ldots, x_n)$.

- Veiem, per tant, que T_2 és una funció homogènia de grau 2 en les velocitats.

- *Teorema d'Euler*: Sigui f diferenciable i homogènia de grau μ en les variables x_i, aleshores:

$$\sum_i x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \mu f$$

- En conseqüència, com que T_2 és homogènia de grau 2 en les $\dot{q}_i$, podríem escriure $2T = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$, però si el **potencial no depèn de les velocitats generalitzades** (o, dit d'una altra manera, el potencial és homogeni d'ordre zero en les velocitats generalitzades) tenim que $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ i, per tant

$$2T = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

- En aquest cas (quan relació entre coordenades $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_j)$ no depèn del temps i el potencial $V = V(q_k;t)$ no depèn de les velocitats generalitzades), la funció energia es pot escriure com

$$h = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = 2T - (T - V) = T + V = E$$

- És a dir, la funció energia, h, coincideix amb l'energia mecànica del sistema E quan se satisfan les condicions del punt anterior. I, per tant, **l'energia es conserva** quan (coincideix amb h) i el lagrangià no depèn del temps.

- Teorema de Noether: Si $L = L(q_i, \dot{q}_i)$ és invariant sota la transformació

$$q_i \longmapsto h^s(q_i) \qquad\qquad \forall s \in \mathbb{R}$$

tal que $h^{s=0}(q_i) = q_i$, aleshores

$$I(q_i, \dot{q}_i) \equiv \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} [h^s(q_i)]_{s=0}$$

es conserva.

Equacions de Hamilton

- Es treballa amb $2N$ variables independients: les coordenades generalizades q_i i els moments conjugats p_i.
- L'estat del sistema ve descrit en un espai $2N-$dimensional anomenat **espai de fases**.
- Matemàticament, el pas de variables $(q_i, \dot{q}_i; t) \mapsto (q_i, p_i; t)$, on p_i està relacionat amb q_i i $\dot{q}_i$ per $p_i = \frac{\partial L(q_j, \dot{q}_j; t)}{\partial \dot{q}_i}$, ve donat per les **transformacions de Legendre**.
- Donada una funció $f = f(x, y)$ tal que $\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y = u\mathrm{d}x + v\mathrm{d}y$, si ara volem trobar una funció $g(u, y)$ tal que $\mathrm{d}g$ sigui equivalent a $\mathrm{d}f$, veiem que aquesta funció és

$$g(u, y) = f(x, y) - ux,$$

on $x = -\frac{\partial g}{\partial u}$. Diem que g és la transformada de Legendre d'f.

- El **Hamiltonià** és la (menys) transformada de Legendre del Lagrangià:

$$\boxed{H = H(q_i, p_i; t) \equiv \sum_i \dot{q}_i p_i - L(q_i, \dot{q}_i; t)}$$

- Calculant el diferencial

$$\mathrm{d}H = \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i}\mathrm{d}q_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i}\mathrm{d}p_i + \frac{\partial H}{\partial t}\mathrm{d}t$$

i comparant amb

$$\mathrm{d}H = \sum_i (\dot{q}_i \mathrm{d}p_i - \dot{p}_i \mathrm{d}q_i) - \frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t$$

Veiem que

$$\boxed{\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i, \qquad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i}$$

aquestes dues són les **Equacions de Hamilton.** A més, veiem que

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

- El hamiltonià és la funció energia (expressada en unes altres variables) i coincideix amb l'energia mecànica quan la funció energia coincideix amb l'energia mecànica.
- Construcció formal del Hamiltonià:
  i. Escollir un sistema de coordenades generalitzades $\{q_i\}$.
  ii. Construir el Lagrangià: $L = L(q_i, \dot{q}_i; t) = T - V$
  iii. Calcular els moments conjugats: $p_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$
  iv. $H = \sum_i \dot{q}_i p_i - L$
  v. Invertir les relacions en (iii.): $\dot{q}_i = \dot{q}_i(q_i, p_i; t)$ i substituir-ho a (iv.)
- En moltes ocasions, però, es donarà el cas en què $H = h = E$, i el que farem serà
$$H = T + V,$$
com que V no dependrà de les velocitats generalitzades trobarem els moments conjugats p_j fent $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$.
- Els **teoremes de conservació** en el cas del Hamiltonià són idèntics als del Lagrangià, ja que si q_j és cíclica no apareix en el Lagrangià i, per la definició que tenim de Hamiltonià, tampoc apareixerà en ell. Per tant, si q_j és cíclica:
$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_j \text{ es conserva.}$$
- No obstant, per a la conservació de l'energia tenim que si tel temps no apareix al Lagrangià
$$-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0,$$
la part esquerra de la igualtat implica que h és constant. En canvi, que $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ no implica que H sigui constant, ja que les derivades no són totals. Hem de demostrar, doncs, que
$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = 0$$
Com que
$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} = 0 + \frac{\partial H}{\partial t}$$
- És a dir, $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial t}$ i, per tant, quan $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ el Hamiltonià es conserva i, quan $H = E$, l'energia es conserva.
- El hamiltonià no és invariant sota transformacions de coordenades.

Derivació del principi de Hamilton mitjançant principis variacionals

- En l'espai de configuració
$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i; t)\mathrm{d}t = 0$$

- En l'espai de fases: principi de Hamilton modificat

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_i p_i \dot{q}_i - H(q_k, p_k; t) \right] \mathrm{d}t = 0$$

- Ara som en un espai de dimensió $2N$, per tant, tindrem una funció $f = f(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}; x)$, on $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_{2N})$. Per tant

$$\delta I = \delta \int_{x_1}^{x_2} f(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}; x) \mathrm{d}x = 0.$$

- Sabem que la solució a la integral anterior són les equacions d'Euler - Lagrange:

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i}\right)$$

- En el cas del principi de Hamilton modificat $f = \sum_i p_i \dot{q}_i - H(q_j, p_j; t)$, $\mathbf{y} = (q_1, \ldots, q_N, p_1, \ldots, p_N)$, $\dot{\mathbf{y}} = (\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N, \dot{p}_1, \ldots, \dot{p}_N)$ i $x = t$. Per tant:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial f}{\partial q_i} = 0 \quad \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial \dot{q}_i} = p_i \\ \dfrac{\partial f}{\partial q_i} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} = 0.$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{p}_i}\right) - \frac{\partial f}{\partial p_i} = 0 \quad \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial \dot{p}_i} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial p_i} = q_i - \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} = 0.$$

- Si volguéssim obtenir el resultat fent la derivada tal i com fèiem amb les Eqs. de Lagrange, ens podríem preguntar si, de la mateixa forma que imposàvem $\eta_i(t_1) = \eta_1(t_2) = 0$, caldria imposar que, per als camins variats $p_i(\alpha, t) = p_i(0, t) + \alpha \zeta_i(t)$ cal que $\zeta_i(t_1) = \zeta_i(t_2) = 0$. És a dir, si cal que $\delta p_i(t_1) = \delta p_i(t_2) = 0$. El motiu pel qual s'imposava $\eta_i(t_{1,2}) = 0$ era perquè al llarg del desenvolupament ens apareixia la següent expressió:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} \right|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y_i}\right) \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} \mathrm{d}x = 0$$

Aleshores, perquè fos zero calia imposar que el primer terme fos zero, i això succeia quan $\delta q_i(t_{1,2}) \equiv \delta y(x_{1,2}) = 0$. Però en el cas del Hamiltonià $\frac{\partial H}{\partial \dot{p}_i} \equiv \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} = 0$ i, per tant, sembla que no caldria imposar que les variacions als extrems fossin nul·les. No obstant, si considerem que les equacions de Hamilton també es verifiquen per a un Lagrangià de l'estil $L' = L + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(q_i, t)$ i, per tant, també hauran de verificar-se per a un Hamiltonià tal que $H' = H + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(q_i, p_i, t)$. Aleshores, a l'acció també ens apareixeran termes per a $\dot{p}_i$ i caldrà imposar $\zeta_i(t_1) = \zeta_i(t_2) = 0$.

Principi de mínima acció

- És un principi variacional desenvolupat a l'espai de configuració.
- A diferència del principi de Hamilton (on imposàvem que les variacions als extrems fossin nul·les) aquí:
  - i. No exigim que t_1 i t_2 siguin l'estat inicial i final de cada camí.
  - ii. No exigim que la variació als extrems sigui nul·la, és a dir, no cal que $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$.
- Definim, de la mateixa forma que en el principi de Hamilton, la família de camins veïns:
$$q_i(t, \alpha) = q_i(t, 0) + \alpha \eta_i(t)$$
on α és un paràmetre infinitessimal i $\eta_i(t)$ una funció arbitrària contínua fins a la segona derivada (i *no* ha d'anul·lar-se als extrems).
- Per exemplificar què serà cada variació agafem dos camins, un a $\alpha = 0$ i un altre a α. Un punt $q_i(t_1)$ del camí original, correspon a un punt $q_i(t_1 + \Delta t_1)$ per al camí variat i el mateix per a $q_i(t_2)$ i $q_i(t_2 + \Delta t_2)$. Aleshores, definim $\delta q_i(t_2)$ com la diferència entre $q_i(t_2)$ del primer camí i $q_i(t_2)$ del camí variat (que no són iguals!). I definim la variació $\Delta q_i(t_2)$ com la varaició entre $q_i(t_2)$ pel primer camí i $q_i(t_2 + \Delta t_2)$ del segon camí.
- És a dir, $\delta \ \rightarrow$ camins diferents però mateix temps i $\Delta \ \rightarrow$ camins i temps diferents (ritmes, o "velocitats", diferents).
- Aleshores, definim la variació ΔI com
$$\Delta I = \Delta \int_{t_1}^{t_2} L \mathrm{d}t = \int_{t_1+\Delta t_1}^{t_2+\Delta t_2} L(\alpha) \mathrm{d}t - \int_{t_1}^{t_2} L(0) \mathrm{d}t$$
On $L(\alpha)$ significa que la integral és evaluada al llarg del camí variat (des de $t_1 + \Delta t_1$ fins a $t_2 + \Delta t_2$, que no han de coincidir amb els punts inicial i final) i $L(0)$ és el mateix pel camí original. Desenvolupant la primera integral com
$$\int_{t_1+\Delta t_1}^{t_2+\Delta t_2} L(\alpha) \mathrm{d}t = \int_{t_2}^{t_2+\Delta t_2} L(\alpha) \mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2} L(\alpha) \mathrm{d}t + \int_{t_1+\Delta t_1}^{t_1} L(\alpha) \mathrm{d}t$$
I desenvolupant la primera i la tercera integral en sèrie de Taylor per a α (quedant-nos a primer ordre):
$$\int_{t_1+\Delta t_1}^{t_2+\Delta t_2} L(\alpha) \mathrm{d}t = L(t_2)\Delta t_2 - L(t_1)\Delta t_1 + \int_{t_1}^{t_2} L(\alpha) \mathrm{d}t$$
Per tant:
$$\Delta I = \int_{t_1}^{t_2} L(\alpha) \mathrm{d}t - \int_{t_1}^{t_2} L(0) \mathrm{d}t + L(t_2)\Delta t_2 - L(t_1)\Delta t_1 = \delta \int_{t_1}^{t_2} L \mathrm{d}t + L(t_2)\Delta t_2 - L(t_1)\Delta t_1$$

- Si ara desenvolupem la integral (que és la mateixa que la del principi de Hamilton) tenint en compte que les δq_i als extrems no s'anul·len, per un procediment semblant al del Pr. Hamilton, s'arriba a:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i \mathrm{d}t + \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i \bigg|_1^2 = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i \bigg|_1^2$$

ja que el terme de dins del parèntesi són les Eq. de Lagrange i s'anul·la.

- Ens queda que

$$\Delta I = \left(L\Delta t + \sum_i p_i \delta q_i \right)\bigg|_1^2$$

- Es pot demostrar que existeix una relació entre Δ i δ tal que

$$\Delta q_i(t_2) = q_i(t_2 + \Delta t_2, 0) - q_i(t_2, 0) \quad \Rightarrow \quad \Delta q_i(2) = \dot{q}_i(2)\Delta t_2 + \delta q_i(2),$$

on $\Delta q(2)$ és Δq al temps de l'estat final.

- Si introduim aquesta última relació a ΔI obtenim que

$$\Delta I = \Delta \int_{t_1}^{t_2} L\mathrm{d}t = \left. (p_i \Delta q_i - H\Delta t) \right|_1^2$$

- El principi de mínima acció requereix introduir dues restriccions:

  i. H es coneserva per a tots els camins.

  ii. $\Delta q_i = 0$ als extrems.

- En conseqüència:

  (a)

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} L\mathrm{d}t = -H(\Delta t_2 - \Delta t_1)$$

  (b) Com que $L = \sum_i pi\dot{q}_i - H$, evaluem

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} L\mathrm{d}t = \Delta \int_{t_1}^{t_2} \sum_i p_i \dot{q}_i \mathrm{d}t - \Delta \int_{t_1}^{t_2} H\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i p_i \dot{q}_i \mathrm{d}t - H(\Delta t_2 - \Delta t_1)$$

- Com que (a) ha de ser igual a (b), arribem al **principi de mínima acció**:

$$\boxed{\Delta \int_{t_1}^{t_2} \sum_i p_i \dot{q}_i \mathrm{d}t = 0}$$

3 Transformacions canòniques

- Si tinguéssim un Hamiltonià en el qual totes les coordenades q_i fossin cícliques i, a més, aquest hamiltonià fos una constant del moviment, seríem en un cas en què:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0 \quad \rightarrow \quad p_i = \alpha_i = \text{const.} \qquad\qquad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial \alpha_i} = \omega_i = \text{const.}$$

  i, per tant, la solució de les equacions del moviment seria $q_i(t) = \omega_i t + \beta_i$, amb β_i una constant d'integració.

- Buscarem SR en què totes les coordenades siguin cícliques. Com que aquesta tasca no és senzilla, ens interessarà trobar un mètode per a transformar aquestes conjunt de coordenades (q_k, p_k) en un altre de coordenades **independents** més adequat (Q_i, P_i):

$$Q_i = Q_i(q_k, p_k; t) \qquad\qquad P_i = (p_k, q_k; t)$$

  És a dir, les noves coordenades estaran definides no només en terme de les coordenades antigues sinó que també en terme dels moments antics.

- Com que volem que les noves coordenades verifiquin l'equació de Hamilton, caldrà que aquestes transformacions siguin **canòniques**. Per tant, les equacions que hauran de satisfer és:

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} \qquad\qquad \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i},$$

  on K és el nou Hamiltonià.

- Al ser (q_i, p_i) i (Q_i, P_i) canòniques, caldra que, respectivament:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_i p_i \dot{q}_i - H(q_i, p_i; t) \right] \mathrm{d}t = 0 \qquad \text{i} \qquad \delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_i P_i \dot{Q}_i - K(Q_i, P_i; t) \right] \mathrm{d}t = 0$$

- Com que han de ser vàlides $\forall t$, i la variació als extrems és nul·la, l'expressió més general de la transformació és:

$$\lambda \left(\sum_i p_i \dot{q}_i - H \right) = \sum_i P_i \dot{Q}_i - K + \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t},$$

- Mitjançant una transformació d'escala, sempre podrem fer $\lambda = 1$:

$$\boxed{\sum_i p_i \dot{q}_i - H = \sum_i P_i \dot{Q}_i - K + \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}}$$

  Quan la transformació no depengui del temps l'anomenarem TC restringida.

- La funció F pot ser una funció de $(q_i, p_i; t)$, de $(Q_i, P_i; t)$ o una mescla d'ambdues. No obstant, només serà útil per a caracteritzar de forma exacta la TC quan la meitat de variables siguin velles i l'altra meitat noves. Quan això succeeix se l'anomena **funció generatriu**.

- Considerem el cas en què $F = F_1(q_i, Q_i; t)$. Si fem la derivada i comparem amb l'expressió del Hamiltonià H arribem a:

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \qquad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \qquad K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

  La primera equació ens dóna p_i com a funció de q_j, Q_j i t. Invertint-la podrem trobar les Q_n en funció de les variables velles. Un cop tinguem la relació entre Q i les variables velles, amb la segona equació podrem trobar P_i en funció de les velles també. Per últim, la tercera equació fa de pont entre K i H.

- És possible que ens interessi més fer ús d'una funció generatriu en què intervinguin altres variables. Si ho fem i seguim el mateix procediment arribem a:

FUNCIÓ GENERATRIU	**RELACIONS**
$F = F_1(q_i, Q_i; t)$	$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \quad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \quad K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}$
$F = F_2(q_i, P_i; t) - Q_i P_i$	$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \quad K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}$
$F = F_3(p_i, Q_i; t) + q_i p_i$	$q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i} \quad P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i} \quad K = H + \frac{\partial F_3}{\partial t}$
$F = F_3(p_i, P_i; t) + q_i p_i - Q_i P_i$	$q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i} \quad Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i} \quad K = H + \frac{\partial F_4}{\partial t}$

$$K(Q_i, P_i; t) = H(Q_i, P_i; t) + \frac{\partial F_i(Q_i, P_i; t)}{\partial t}$$

- Quan F no depèn de $t \Rightarrow K = H$

Transformacions canòniques en notació simplèctica

- Notació:

  i. Vector columna $\boldsymbol{\eta}$ amb $2n$ elements:

$$\eta_i = q_i \qquad \eta_{i+n} = p_i \qquad i \leq n$$

  i. Vector columna $\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\eta}}$ de $2n$ elements:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \eta}\right)_i = \frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad \left(\frac{\partial H}{\partial \eta}\right)_{i+n} = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

iii. Matriu quadrada de $2n \times 2n$:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & \dots & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & \dots & -1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

- Per tant, les equacions de Hamilton en notació simplèctica prenen la forma:

$$\boxed{\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{J}\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\eta}}}$$

- Anem a trobar condicions directes perquè una transformació sigui canònica restringida ($\neq f(t)$):

  Considerem les següents transformacions junt amb les seves inverses:

$$\begin{aligned} Q_i &= Q_i(q_k, p_k) \qquad & q_i &= q_i(Q_k, P_k) \\ P_i &= P_i(q_k, p_k) \qquad & p_i &= p_i(Q_k, P_k) \end{aligned}$$

  Derivant Q_i respecte del temps:

$$\dot{Q}_i = \sum_j \left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial Q_i}{\partial p_j}\dot{p}_j \right) = \sum_j \left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j} \right)$$

  De les transformacions inverses, podem considerar $H(q_i, p_i; t)$ com una funció de les noves variables. Aleshores, a partir de les equacions de Hamilton (tenint en compte que, al ser la transformació restringida, $H = K$):

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P_i} = \frac{\partial H}{\partial P_i} = \sum_j \left(\frac{\partial H}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial P_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial P_j} \right)$$

  Comparant amb les equacions de dalt, i fent el mateix per a $\dot{P}_i$ obtenim les **condicions directes per a una transformació canònica restringida**:

$$\boxed{\left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\right)_{q,p} = \left(\frac{\partial p_j}{\partial P_i}\right)_{Q,P}} \qquad \boxed{\left(\frac{\partial Q_i}{\partial p_j}\right)_{q,p} = -\left(\frac{\partial q_j}{\partial P_i}\right)_{Q,P}}$$

$$\boxed{\left(\frac{\partial P_i}{\partial q_j}\right)_{q,p} = -\left(\frac{\partial p_j}{\partial Q_i}\right)_{Q,P}} \qquad \boxed{\left(\frac{\partial P_i}{\partial p_j}\right)_{q,p} = \left(\frac{\partial q_j}{\partial Q_i}\right)_{Q,P}}$$

- Fent ús de la notació simplèctica, podem expressar aquestes condicions de forma molt més compacta. Si $\boldsymbol{\eta}$ és la matriu que té per components (q_i, p_i), podem definir també una altra matriu $\boldsymbol{\zeta}$ que tingui per components les coordenades transformades $Q_i(q_k, p_k; t)$ i $P_i(q_k, p_k; t)$. Per tant

$$\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\zeta}(\eta)$$

- De la mateixa forma que $\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{J}(\partial H/\partial \boldsymbol{\eta})$, podem derivar $\boldsymbol{\zeta}$. En components:

$$\dot{\zeta}_i = \sum_j \frac{\partial \zeta_i}{\partial \eta_j}\dot{\eta}_j = \sum_j M_{ij}\dot{\eta}_j \qquad \rightarrow \qquad \dot{\boldsymbol{\zeta}} = \boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{\eta}}$$

on $\boldsymbol{M} = M_{ij}$ és el jacobià de la transformació. D'aquí veiem que:

$$\boxed{\dot{\boldsymbol{\zeta}} = \mathbf{MJ}\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\eta}}}$$

Aleshores, si $\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\zeta}(\eta)$, podem invertir-ho i $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}(\zeta)$, de manera que $H = H[\eta_i(\zeta_i)]$ i

$$\frac{\partial H}{\partial \eta_i} = \sum_j \frac{\partial H}{\partial \zeta_j}\frac{\partial \zeta_j}{\partial \eta_i} \qquad \rightarrow \qquad \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\eta}} = \mathbf{M}^{\mathrm{T}}\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\eta}}$$

De les dues equacions anteriors, veiem que

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = \mathbf{MJM}^{\mathrm{T}}\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\zeta}}$$

Com que s'ha de verificar que

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = \mathbf{J}\frac{\partial K}{\partial \boldsymbol{\zeta}} \qquad \xrightarrow{\text{restr.}} \qquad \dot{\boldsymbol{\zeta}} = \mathbf{J}\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\zeta}}$$

la transformació $\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{\eta})$ serà canònica si

$$\boxed{\mathbf{MJM}^{\mathrm{T}} = \mathbf{J}}$$

que és equivalent a les quatre condicions directes anteriorment mostrades.

Parèntesis de Poisson

- Siguin u, v dues funcions de variables (q_i, p_i), definim el parèntesi de Poisson (forma bilineal anitisimètrica) com

$$[u, v] \equiv \sum_i \left(\frac{\partial u}{\partial q_i}\frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i}\frac{\partial v}{\partial q_i}\right)$$

- El parèntesi de Poisson ens permet calcular la variació temporal de la funció $g(q_i, p_i; t)$ com

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial g}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial g}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial g}{\partial p_i}\dot{p}_i\right) = \frac{\partial g}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial g}{\partial t} + [g, H]_{p,q}$$

- Els parèntesi de Poisson prenen la següent forma en notació simplèctica

$$[u, v]_{\boldsymbol{\eta}} = \left(\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\eta}}\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{J} \left(\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\eta}}\right)$$

- En el cas en què u, v són (q_i, p_i), tenim els **parèntesis fonamentals de Poisson**:

$$[q_j, q_k]_{q,p} = 0 = [p_j, p_k]_{q,p} \qquad [q_j, p_k]_{q,p} = \delta_{jk} = -[p_j, q_k]_{q,p}$$

- En notació simplèctica, si definim la matriu quadrada $[\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}]_{\boldsymbol{\eta}}$ d'element $\eta_{jk} = [\eta_j, \eta_k]$, podem escriure

$$[\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}]_{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{J}$$

- Si ara prenem $Q_i(q_i, p_i; t)$ i $P_i(q_i, p_i; t)$ com a u, v, és a dir $\boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{\eta})$, ens queda el següent:

$$[Q_i, P_i]_{q,p} = \left(\frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\eta}}\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{J} \left(\frac{\partial P}{\partial \boldsymbol{\eta}}\right)$$

  És a dir:

$$[\zeta, \zeta]_{\boldsymbol{\eta}} = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{J} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}\right) = \mathbf{M}^{\mathrm{T}}\mathbf{J}\mathbf{M} = \mathbf{J}$$

  És a dir[1] els **parèntesi de Poisson fonamentals són invariants sota transformacions canòniques**:

$$\boxed{[\eta, \eta]_{\boldsymbol{\eta}} = [\zeta, \zeta]_{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{J} = [\zeta, \zeta]_{\boldsymbol{\zeta}} = [\eta, \eta]_{\boldsymbol{\eta}}}$$

  que és equivalent a la condició de transformació canònica.

- Expressant $\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{\eta})$ i $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\zeta})$ i partint de l'equació de $[u, v]_{\boldsymbol{\eta}}$ es pot demostrar que **tots** els parèntesi de Poisson són invariants sota transformacions canòniques.

$$\boxed{[u, v]_{\boldsymbol{\eta}} = [u, v]_{\boldsymbol{\zeta}}}$$

Equacions del moviment en funció dels parèntesis de Poisson

- Hem vist que l'evolució temporal d'una funció $u(q_i, p_i; t)$ es pot expressar com

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial u}{\partial t} + [u, H]$$

  Si fem això per a les variables q_i i p_i, trobarem una nova manera de formular les equacions de hamilton:

$$\boxed{\dot{q}_i = [q_i, H]} \qquad \boxed{\dot{p}_i = [p_i, H]}$$

  Els termes $\frac{\partial q_i}{\partial t}$ i $\frac{\partial p_i}{\partial t}$ s'anul·len ja que són a un punt fix de l'espai de fases i, per tant, les coordenades no varien amb el temps.

- Podem resumir-les en notació simplèctica com

$$\boxed{\dot{\boldsymbol{\eta}} = [\boldsymbol{\eta}, H]}$$

[1] Es pot demostrar que la última igualtat és certa.

- En el cas particular en què u sigui una constant del moviment,és a dir, $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0$, ens queda que

$$[H, u] = \frac{\partial u}{\partial t}$$

a més, si u no depèn explícitament del temps:

$$[u, H] = 0$$

- Teorema de Poisson: si u, v són constants del moviment, aleshores $[u, v]$ és una constant del moviment.

3.1 Teorema de Liouville

- Resultats previs:

  i. **Invariant integral de Poincaré**: Sigui un element de volum

  $$\mathrm{d}\eta = \mathrm{d}q_1 \dots \mathrm{d}q_n \mathrm{d}p_1 \dots \mathrm{d}p_n$$

  aleshores, si considerem una transformació canònica $\boldsymbol{\eta} \to \boldsymbol{\zeta}$, l'element de volum es transforma a

  $$\mathrm{d}\zeta = \mathrm{d}Q_1 \dots \mathrm{d}Q_n \mathrm{d}P_1 \dots \mathrm{d}P_n$$

  Aquestes transformacions es relacionen mitjançant el valor absolut del determinant del jacobià de la transformació $\mathbf{M}$

  $$\mathrm{d}\zeta = ||\mathbf{M}||\mathrm{d}\eta$$

  Com que la transformació és canònica es pot demostrar que $|\mathbf{M}| = \pm 1 \;\; \to \;\; ||\mathbf{M}|| = 1$, per tant

  $$\mathrm{d}\zeta = \mathrm{d}\eta$$

  i els volums són iguals. És a dir,

  $$J_n = \int \cdots \int \mathrm{d}\eta$$

  és invariant sota TC.

  ii. **Transformacions canòniques al mateix espai de fases:** Habitualment passem d'un espai de fases η en el qual les coordenades d'un punt $\mathcal{A}$ són (q, p) a un altre espai de fases ζ en què describim el mateix estat mitjançant un punt $\mathcal{A}'$ de coordenades (Q, P). No obstant, l'evlució dinàmica d'un sistema entre 2 estats $\eta(t_0) \to \eta(t)$ també és pot descriure mitjançant una transformació canònica al mateix espai.

- **Teorema de Liouville**: La densitatde sistemes entorn a un donat es manté constant.

  Això es demostra mitjançant l'invariant de Poincaré i tenint en compte que (pel principi de determinació de Newton) qualsevol punt interior al sistema considerat mai podrà sortir d'ell. En conseqüència:

  $$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial D}{\partial t} + [D, H] = 0, \qquad \text{com que } \; \frac{\partial D}{\partial t} = 0 \quad \to \quad \boxed{[D, H] = 0}$$

Equació de Hamilton-Jacobi

- Buscarem una TC que ens passi de (q_i, p_i) a un conjunt de coordenades totes constants que podrien ser les condicions inicials $(Q_i, P_i) = (q_{i0}, p_{i0})$. En aquest cas

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} = 0 \qquad \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} = 0$$

i, per tant $K = 0$. En conseqüència:

$$H(q_i, p_i; t) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

Ens serà útil fer ús de $F = F_2(q_i, P_i; t)$, on $p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}$, així que

$$\boxed{H\left(q_1, \ldots, q_n + \frac{\partial F_2}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial F_2}{\partial q_n}; t\right) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0}$$

aquesta quació es coneix amb el nom d'**equació de Hamilton - Jacobi**. I és una equació diferencial per a F_2 d'$n+1$ variables: q_i i t. Aquesta solució es denota per $F_2 \equiv S$ i s'anomena **funció principal de Hamilton**.

- Quan solucionem l'equació diferenciall anterior, ens apareixen $n+1$ constants d'integració $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$. Afegir o treure una una constant no afecta, ja que a l'equació original tenim derivades d'S. Per tant, ens podem quedar amb les α_i i, tenint en compte que P_i és constant, podem dir que $P_i = \alpha_i$ i, en conseqüència:

$$F_2 = F_2(q_i, P_i; t) \equiv S(q_i, \alpha_i; t)$$

com esperàvem.

- Aleshores,

$$p_i = \frac{\partial S(q_i, \alpha_i; t)}{\partial q_i} = f(q_i, \alpha_i; t)$$
$$Q_i = \frac{\partial S(q_i, \alpha_i; t)}{\partial \alpha_i} = g(q_i, \alpha_i; t) \equiv \beta_i = \text{const.}$$

De la transformada inversa:

$$q_i = q_i(Q_i, P_i; t) = q_i(\beta_k, \alpha_k; t)$$

i

$$p_i = f[q_i(\alpha_k, \beta_k; t), \alpha_k; t] = p_i(\alpha_k, \beta_k; t)$$

- Amb q_i i p_i tenim la solució completa de les equacions de moviment de Hamilton.
- S és, per tant, el generador d'una TC a coordenades i moments constants.
- Si derivem la funció principal de hamilton respecte del temps:

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t} = \sum_i p_i \dot{q}_i - H = L$$

És a dir S és l'acció del sistema:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L \mathrm{d}t$$